Corrigé de la séance de révision n$^{\text{o}}$ 7

Exercice 1

1. à 4. g_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, donc de classe C^2, par composition et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\ , \qquad g'_\alpha(x) &= -\frac{\alpha\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\ g''_\alpha(x) &= -\frac{\alpha^2\cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)}{1-x^2} - \frac{\alpha\, x\, \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\\ (1-x^2)g''_\alpha(x) &= -\alpha^2 g_\alpha(x) + x g'_\alpha(x)\,,\end{aligned}$$

et donc g_α est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-1,1[$.

5.(a) Supposons qu'une telle solution y existe. Alors y est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et on a par dérivation terme-à-terme

$$\forall x \in]-1,1[\ , \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.$$

Puisque y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}&\forall x \in]-1,1[\ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in]-1,1[\ , \quad 2a_2 + \alpha^2 a_0 + \big(6a_3 + (\alpha^2-1)a_1\big)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha^2-n^2)a_n\big]x^n = 0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in]-1,1[\ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha^2-n^2)a_n\big]x^n = 0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha^2-n^2)a_n = 0\,,\end{aligned}$$

d'après l'unicité d'un développement en série entière sur un voisinage de 0. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \boxed{a_{n+2} = \frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}\, a_n}\,.$$

On a aussi $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$.

5.(b) Puisque $a_1 = 0$, il vient par une récurrence immédiate à l'aide de la formule précédente,

$$\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad a_{2p+1} = 0\,.$$

5.(c) Pour $p \geqslant 1$, substituons $2p-2$ à n dans la formule de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*\,, \quad a_{2p} = \frac{(2p-2)^2-\alpha^2}{(2p)(2p-1)}\, a_{2p-2}\,.$$

On en déduit en cascade, et puisque $a_0 = 1$, que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*\,, \quad a_{2p} = \prod_{i=1}^{p}\left[\frac{(2i-2)^2-\alpha^2}{(2i)(2i-1)}\right] = \boxed{\frac{1}{(2p)!}\prod_{i=1}^{p}\big[(2i-2)^2-\alpha^2\big]}\,.$$

5.(d) La série entière obtenue est $\sum_{p\geqslant 0} a_{2p}\, x^{2p}$. Si il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que $\alpha^2 = (2i-2)^2$, c'est-à-dire exactement si $\alpha \in 2\,\mathbb{Z}$, alors la suite $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ stationne à zéro, et donc le rayon de convergence est infini. Dans le cas contraire, la suite

$(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels non nuls et on peut appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques : on pose $b_p = a_{2p}\, x^{2p}$ pour tout entier p et tout $x \neq 0$ et on a

$$\left|\frac{b_{p+1}}{b_p}\right| = \left|\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right| x^2 = \frac{4p^2-\alpha^2}{(2p)(2p+2)}\, x^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} x^2 \,.$$

La série converge donc si $|x|<1$ et diverge si $|x|>1$ ce qui montre que le rayon de convergence est 1. Ainsi,

$$\text{Le rayon de convergence est } \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \in 2\,\mathbb{Z}\,, \\ 1 & \text{si } \alpha \notin 2\,\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

6. Il est sous-entendu qu'on cherche une solution polynomiale de $(\mathscr{E})$ **non nulle** ...

Une solution polynomiale de $(\mathscr{E})$ est une solution développable en série entière de $(\mathscr{E})$ dont la suite des coefficients stationne à zéro. Or on a de manière générale les expressions

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*\,, \quad a_{2p} \;=\; \frac{1}{(2p)!}\prod_{i=1}^{p}\left[(2i-2)^2-\alpha^2\right] a_0 \quad \text{ et } \quad a_{2p+1} \;=\; \frac{1}{(2p+1)!}\prod_{i=1}^{p}\left[(2i-1)^2-\alpha^2\right] a_1\,.$$

La suite $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ stationne à zéro si et seulement si α est un entier relatif pair **ou** $a_0 = 0$. De même la suite $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ stationne à zéro si et seulement si α est un entier relatif impair **ou** $a_1 = 0$.

Puisqu'on exclut que $a_0 = a_1 = 0$, il est nécessaire et suffisant que $\boxed{\alpha \in \mathbb{Z}}$ pour qu'une telle solution existe.

7. $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ g_1(x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)} = \sqrt{1-x^2}\,.$

8.(a) $\forall\, x \in [-1,1]\,,\ g_2(x) = \cos(2\operatorname{Arcsin} x) = 1-2\sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1-2x^2\,.$

8.(b) Question ridicule.

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer le rayon de convergence de la série entière. Appliquons la règle de d'Alembert : pour $x \neq 0$, et $n \geqslant 1$, on a $\left|\dfrac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n}\right| = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ et donc la série converge si $|x|<1$ et diverge si $|x|>1$. Ceci caractérise un rayon de convergence égal à 1.

De plus, les séries numériques $\sum n^k$ et $\sum n^k(-1)^n$ sont grossièrement divergentes, donc le domaine de convergence de la série est $I =]-1,1[$.

2. S_k étant la fonction somme d'une série entière de rayon 1, elle est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et on a droit à la dérivation terme à terme :

$$\forall\, x \in]-1,1[\,, \quad S_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$$

et donc, le terme d'indice $n=0$ étant nul car $k+1>0$,

$$\forall\, x \in]-1,1[\,, \quad xS_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n} = S_{k+1}(x)\,.$$

La relation cherchée est donc $\forall\, x \in]-1,1[\,,\ \boxed{S_{k+1}(x) = xS_k'(x)}$.

3. Pour tout x de I, on a successivement

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

$$S_1(x) = xS_0'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,,$$

$$S_2(x) = xS_1'(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\,.$$

4. • **Existence** : Montrons par récurrence sur l'entier k l'énoncé

$$E_k \ : \ \text{« } \exists\, P_k \in \mathbb{R}[X]\,,\ \forall\, x \in I\,,\ S_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \text{ »}$$

E_0 est vrai : le polynôme $P_0 = 1$ convient. Supposons que l'énoncé E_k soit vérifié, k étant arbitrairement fixé, et démontrons qu'alors E_{k+1} l'est aussi. Pour $x \in I$ on a

$$S_{k+1}(x) \;=\; xS_k^{'}(x) \;=\; x\frac{P_k{}'(x)}{(1-x)^{k+1}} + (k+1)x\frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \;=\; \frac{x(1-x)P_k{}'(x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$$

et donc E_{k+1} est vérifié avec le polynôme P_{k+1} défini par $\boxed{P_{k+1} = X(1-X)P_k^{'} + (k+1)XP_k}$.

• **Unicité** : La relation $P_k(x) = (1-x)^{k+1}S_k(x)$ détermine de manière unique $P_k(x)$ sur $I =]-1,1[$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier d'après le raisonnement suivant : si Q_k est un autre polynôme convenable, le polynôme $P_k - Q_k$ possède une infinité de racines (tous les éléments de I) donc il est nul, d'où $P_k = Q_k$.

5. L'unicité permet d'identifier les polynômes obtenus grâce à la question 3 : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X(X+1)$.

6. Ça a déjà été démontré à la question 4.

7. • Pour $x \in I$ on a $P_k(x) = (1-x)^{k+1}S_k(x)$ et donc $P_k(0) = S_k(0)$ ce qui vaut 0 dès que $k \geqslant 1$.
On pouvait aussi utiliser la relation de la question précédente.

• « P_k est unitaire et de degré k » se prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. $P_0 = 1$ est unitaire et de degré 0. Supposons l'énoncé vrai au rang k, alors la relation $P_{k+1} = X(1-X)P_k^{'} + (k+1)XP_k$ prouve que P_{k+1} est la somme de deux polynômes de degrés au plus $k+1$ et donc $P_{k+1} \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$.
De plus le coefficient de X^{k+1} dans P_{k+1} est $-k + (k+1) = 1$ ce qui achève la récurrence.

On pouvait aussi inclure ces propriétés dans la récurrence faite à la question 4.

8. • Il vient immédiatement $A = S_2(1/4) = \dfrac{(1/4)^2 + 1/4}{(1-1/4)^3} = \dfrac{20}{27}$.

• Notons b_n le terme général de la série définissant B. La présence du $(-1)^n$ nous invite à séparer les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad b_{2p} = \frac{(2p)^2}{2^{2p+1}} \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\,.$$

On voit facilement (d'Alembert) que les deux séries $\sum b_{2p}$ et $\sum b_{2p+1}$ sont convergentes et donc B existe et on a

$$B = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \underset{\text{not}}{=} C + D\,.$$

▸ *1re méthode* : pour calculer C (resp. D) on élimine les termes pairs (resp. impairs) dans la série définie par $S_2\left(\frac{1}{2}\right)$. Classiquement :

$$\begin{aligned}
S_2\left(\tfrac{1}{2}\right) + S_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{n^2}{2^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} 2\frac{(2p)^2}{2^{2p}} = 4C\,,\\
S_2\left(\tfrac{1}{2}\right) - S_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{n^2}{2^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} 2\frac{(2p+1)^2}{2^{2p+1}} = D\,.
\end{aligned}$$

On calcule alors $S_2\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ et $S_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{2}{27}$ ce qui fournit $C = \dfrac{40}{27}$ et $D = \dfrac{164}{27}$ d'où $\boxed{B = \dfrac{68}{9}}$.

▸ *2de méthode* : on a directement

$$C \;=\; \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)^2}{2^{2p+1}} \;=\; 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^2}{4^p} \;=\; 2S_2\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{40}{27}\,,$$

et

$$D \;=\; \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p+1)^2}{2^{2p}} \;=\; \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4p^2+4p+1}{4^p} \;=\; 4S_2\left(\tfrac{1}{4}\right) + 4S_1\left(\tfrac{1}{4}\right) + S_0\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{164}{27}$$

d'où le résultat.

Exercice 3

1. Le DSE (centré en 0) de la fonction exponentielle s'écrit : $\forall\, u \in \mathbb{R}\,,\ e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\,.$

2.(a) En substituant $-\dfrac{x^2}{2}$ à u dans le DSE précédent, on obtient l'identité suivante, valable sur $\mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\, n!}\,,$$

ce qui constitue bien le développement en série entière (centrée en 0) de la fonction $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.(b) La fonction proposée est la primitive nulle en zéro de la fonction précédente et d'après le cours toute primitive d'une fonction développable en série entière est elle-même développable en série entière, avec même rayon de convergence ; ici $+\infty$ (et son développement s'obtient par intégration terme-à-terme).

2.(c) La fonction $x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est également développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et son DSE s'obtient comme en 2.(a).
D'après le cours, le produit (de Cauchy) de deux fonctions développables en séries entières l'est également, et son rayon de convergence est supérieur ou égal au minimum des deux rayons. On en déduit que F est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

3. L'identité demandée est immédiate, par la formule de dérivation d'un produit.

4. On a d'abord $F(0) = \boxed{a_0 = 0}$ et $F'(0) = \boxed{a_1 = 1}$ d'après l'identité précédente.
Le DSE de F' a aussi pour rayon $+\infty$ et s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + xF(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n\,.$$

Par unicité d'un développement en série entière de rayon non nul, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \boxed{(n+1) a_{n+1} = a_{n-1}}\,.$$

5. Pour tout entier p on a $a_{2p+2} = \dfrac{a_{2p}}{2p+2}$ et vu que a_0 est nul, une récurrence immédiate montre que tous les termes a_{2p} sont nuls, pour $p \in \mathbb{N}$.
Pour tout entier $p \geqslant 1$ on a $a_{2p+1} = \dfrac{a_{2p-1}}{2p+1}$, donc facilement,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{1}{2p-1} \times \cdots \times \frac{a_1}{3} = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1)!} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}\,.$$

En résumé,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad \boxed{a_{2p} = 0 \ \text{ et } \ a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}}\,.$$

6. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ est convergente, par exemple d'après la domination $e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{+\infty}{=} \circ(e^{-x})$ et la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$. Si on note $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, on a donc

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} K e^{\frac{x^2}{2}}\,,$$

et on peut démontrer que $K = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, mais c'est une autre histoire.

Exercice 4

1.(a) D'après le cours, la série entière géométrique $\sum x^n$ a un rayon de convergence égal à 1, et a pour somme

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\ ,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x}\,.$$

On a droit à la dérivation terme-à-terme dans l'intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\ ,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \;=\; \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

d'où $\forall\, x \in\,]-1,1[\ ,\ \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}}$.

1.(b) Si $y>1$ alors $\frac{1}{y} \in\,]0,1[$ de sorte qu'on peut remplacer x par $\frac{1}{y}$ dans l'identité précédente :

$$\forall\, y>1\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} \;=\; \frac{1}{y-2+\frac{1}{y}}\,.$$

2.(a) • L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $X^2-X-1=0$ qui possède les deux racines réelles distinctes $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc on a l'existence de deux réels γ et δ tels que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\quad w_p = \gamma\lambda^p + \delta\mu^p\,.$$

On détermine γ et δ à l'aide des valeurs de w_0 et w_1, ce qui donne le système

$$\begin{cases} \gamma+\delta = 0 \\ \lambda\gamma+\mu\delta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = -\gamma \\ \gamma = \frac{1}{\lambda-\mu} \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Finalement, $\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\ \boxed{w_p = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^p-\mu^p\right)}$. On aura remarqué que (w_{p+1}) est la suite de Fibonacci.

• Le rayon de convergence des séries géométriques $\sum \frac{\lambda^n}{\sqrt{5}}\, x^n$ et $\sum \frac{\mu^n}{\sqrt{5}}\, x^n$ sont respectivement $\frac{1}{|\lambda|} = -\mu$ et $\frac{1}{|\mu|} = \lambda$ (on se rappelle que $\lambda\mu = -1$).
Comme ces deux rayons sont différents, d'après le cours le rayon de convergence de la série somme $\sum w_n$ est

$$\min(\lambda\,,\,-\mu) = -\mu = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

2.(b) Pour $x \in\,]\mu,-\mu[$ les séries écrites sont convergentes, et on a

$$\begin{aligned} \left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2} x^n \\ &= w_0 + (w_1-w_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left(w_n - w_{n-1} - w_{n-2}\right)}_{=0} x^n \\ &= x\,. \end{aligned}$$

2.(c) Si y est tel que $\frac{1}{y} \in\,]\mu,-\mu[$, c'est-à-dire si

$$y \in \left]-\infty, \frac{1}{\mu}\right[\cup \left]-\frac{1}{\mu}, +\infty\right[\;=\;]-\infty,-\lambda[\,\cup\,]\lambda,+\infty[$$

alors on peut appliquer l'identité précédente à $x = \dfrac{1}{y}$ et on obtient

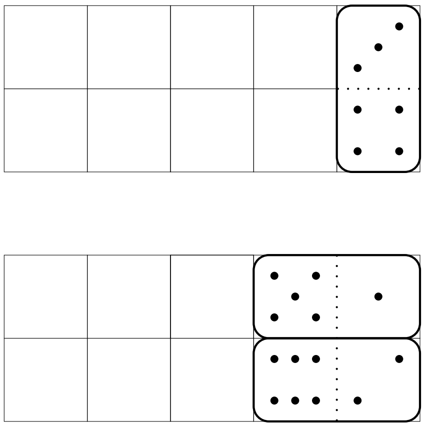
$$\left(1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} \;=\; \frac{1}{y}\,.$$

De plus, $x = \dfrac{1}{y} \notin \{-\lambda, -\mu\}$ car $|x| < -\mu$, donc le facteur $1 - x - x^2$ n'est pas nul, d'où en divisant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} \;=\; \frac{1}{y - 1 - \dfrac{1}{y}}\,.$$

3. Soit n un entier $\geqslant 3$. Comptons le nombre z_n de pavages du quadrillage de dimension $2 \times n$ par des dominos.

Il en existe deux sortes : ceux qui se « terminent » par un domino vertical, et ceux qui se terminent par deux dominos horizontaux.



Il existe autant de manière de fabriquer un pavage de la première sorte que de manière de fabriquer un pavage du quadrillage $2 \times (n-1)$, c'est-à-dire z_{n-1}. De même, il existe autant de manière de fabriquer un pavage de la seconde sorte que de manière de fabriquer un pavage du quadrillage $2 \times (n-2)$, c'est-à-dire z_{n-2}.

Ainsi on a $\forall\, n \geqslant 3\,,\; z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$. La suite (z_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (w_{n+1}) avec les mêmes termes initiaux (puisque $z_1 = 1 = w_2$ et $z_2 = 2 = w_3$). On en conclut que ces deux suites sont égales :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \boxed{z_n = w_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}\right)}\,.$$