Séance de révision n° 5

Réduction

Exercice 1

On se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, c'est également une valeur propre de A.
3. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$.
Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A.
4. Donner l'ensemble de valeurs propres de ϕ_A.
5. Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de ϕ_A).

Exercice 2

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies par leur premier terme $u_0 = 1$; $v_0 = 0$; $w_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction de A, X_0 et n.
2. (a) Démontrer que A admet une unique valeur propre.
   (b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre. A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de f dans la base canonique β de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2.
   On notera dorénavant β' la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (b) Utiliser une décomposition de T de la forme $T = 2I + J$ et la formule du binôme de Newton pour obtenir l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique β à la base β'.
   (a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   (b) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).
   (c) Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme de E tel que $u \neq 0$ et $u^3 + u = 0$.

1. (a) On suppose que u est injectif. Montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker}(u) \in \{1, 2\}$.
2. Montrer qu'on a $E = \operatorname{Ker}(u) \bigoplus \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
3. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
4. On considère un vecteur e_1 non nul de $\operatorname{Ker}(u)$, un vecteur e_2 non nul de F et on pose $e_3 = u(e_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e_2, e_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

et on note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Montrer que, quel que soit α, l'endomorphisme f_α admet la valeur propre 1.
   (b) On note $E_1(\alpha)$ le sous-espace propre de f_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.
2. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, -1)$ et $v_2 = (1, 1, -2)$ et on note F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1 et v_2.
   (a) Montrer que (v_1, v_2) est une base de F.
   (b) Montrer que F est stable par f_α.
   (c) Soit $\widetilde{f_\alpha}$ l'endomorphisme induit par f_α sur F, c'est-à-dire vérifiant pour tout vecteur v de F, $\widetilde{f_\alpha}(v) = f_\alpha(v)$. Donner la matrice de $\widetilde{f_\alpha}$ dans la base (v_1, v_2) de F.
3. Montrer que pour tout réel α, f_α possède la valeur propre $\alpha - 1$ et qu'on peut trouver un vecteur v_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de f_α associé à $\alpha - 1$.
4. (a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f_α dans cette base.
   (b) Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
