

CORRIGÉ DE LA SÉANCE DE RÉVISION N° 5

Exercice 1

1. On a $AM = \lambda M$ donc $(A - \lambda I_d)M = 0_n$. Si on suppose, par l'absurde, que $A - \lambda I_d$ est inversible, alors en multipliant à gauche l'égalité précédente par $(A - \lambda I_d)^{-1}$ on obtient $M = 0_n$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible.

Remarque « $M \in \text{Ker}(A - \lambda I_d)$ » provoque l'exaspération, légitime, du correcteur.

2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A , il existe une matrice M non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$ donc selon la question précédente, $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible, ce qui signifie que λ est valeur propre de A .

3. Écrivons en colonne $M = (0, \dots, 0, X, 0, \dots, 0)$. On a

$$\begin{aligned}\phi_A(M) &= AM = A \times (0, \dots, 0, X, 0, \dots, 0) = (A \times 0, \dots, A \times 0, A \times X, A \times 0, \dots, A \times 0) \\ &= (0, \dots, 0, \mu X, 0, \dots, 0) = \mu M\end{aligned}$$

et comme M n'est pas la matrice nulle (car X n'est pas le vecteur nul), c'est que M est un vecteur propre de ϕ_A pour la même valeur propre μ .

4. D'après la question 2 on a $\sigma_{\mathbb{R}}(\phi_A) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ et d'après la question 3 on a $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\phi_A)$ donc

$$\boxed{\sigma_{\mathbb{R}}(\phi_A) = \sigma_{\mathbb{R}}(A)}.$$

5. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A . Notons, pour tout couple (i, j) appartenant à $\{1, \dots, n\}^2$, M_{ij} la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, à l'exception de la j -ième colonne qui est égale à X_i . D'après le calcul de la question 3, M_{ij} est un vecteur propre de ϕ_A . Il suffit, pour conclure que ϕ_A est diagonalisable, de montrer que la famille $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ou encore de montrer que cette famille est libre (car elle est de cardinal $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Soit $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de n^2 réels tels que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} M_{ij} = 0_n$. On a en colonnes :

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} X_i, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_{in} X_i \right) = 0_n,$$

donc, chaque colonne de cette matrice étant nulle, et la famille $(X_1, \dots, X_n)$ libre, on a $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \alpha_{ij} = 0$ comme voulu.

Exercice 2

1.(a) et 1.(b) Pour tout entier n , on a

$$AX_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - v_n + w_n \\ u_n + 2v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Par une récurrence évidente il vient $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ (avec la convention $A^0 = I_3$).

2.(a) et 2.(b) • On forme le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (3-X)(2-X)(1-X) + 1 + (1-X) = (2-X)[(3-X)(1-X) + 1] \\ &= -(X-2)^3.\end{aligned}$$

Ainsi, 2 est l'unique valeur propre de A et elle est triple.

- L'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est le noyau de la matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est

de rang 2 (au plus 2 car elle n'est pas inversible, et au moins 2 car les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles). On en déduit que E_2 est de dimension $3 - 2 = 1$, c'est donc une droite vectorielle. On remarque aussi que les colonnes C_2 et

C_3 de $A - 2I_3$ sont opposées, d'où $V_1 \underset{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$ et ainsi $E_2 = \mathbb{R} V_1$.

La dimension de l'espace propre E_2 diffère de la multiplicité de la valeur propre 2, donc A n'est pas diagonalisable.

3. (a) On a par construction $AV_1 = 2V_1$. Cherchons deux vecteurs V_2 et V_3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AV_2 = 2V_2 + V_1 \quad ; \quad AV_3 = 2V_3 + V_2 \quad \text{et} \quad (V_1, V_2, V_3) \text{ est libre,}$$

en respectant de plus la condition de l'énoncé portant sur la dernière composante de chaque vecteur.

Écrivons $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors $AV_2 = 2V_2 + V_1$ équivaut à $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ et le vecteur $V_2 \underset{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. De même

en notant $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$ et on pose $V_3 \underset{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-1 \neq 0$.

Les vecteurs $e'_1 = (0, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 0, -1)$ et $e'_3 = (0, 1, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est T .

On retient pour la suite la trigonalisation $A = PTP^{-1}$.

3. (b) On a $T = 2I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice J est **nilpotente** car $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_3$ et donc

aussi $J^k = 0_3$ dès que $k \geq 3$. De plus les matrices I_3 et J commutent ($I_3 \times J = J \times I_3$) donc on est en droit d'appliquer la formule du binôme pour calculer T^n :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n &= (2I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k \times (2I_3)^{n-k} \\ &= (2I_3)^n + nJ \times (2I_3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \times (2I_3)^{n-2} + 0_3 + \dots + 0_3 \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n & n(n-1)/4 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (a) On a obtenu $A = PTP^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. (b) Pour calculer P^{-1} on résout le système

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = a \\ x + z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases} \iff \begin{cases} y = a \\ x + z = b \\ x + 2z = a + c \end{cases} \iff \begin{cases} y = a \\ z = a - b + c \\ x = -a + 2b - c \end{cases}$$

d'où, par identification, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (c) $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = P T^n P^{-1} X_0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n & n(n-1)/4 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n & n(n-1)/4 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} -2 + n + \frac{n(n-1)}{4} \\ 2 + n \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 + n \\ n + \frac{n(n-1)}{4} \\ \frac{n(n-1)}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + n2^{n-1} \quad ; \quad v_n = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \quad ; \quad w_n = n(n-1)2^{n-3}.$$

Exercice 3

1.(a) Si u est injectif alors c'est un automorphisme de E (car E est de dimension finie) et en composant la relation $u^3 + u = \mathcal{O}$ par u^{-1} on obtient $u^2 + id_E = \mathcal{O}$ donc $u^2 = -id_E$.

Autre formulation : $u \circ (u^2 + id_E) = \mathcal{O}$ donc $\text{Im}(u^2 + id_E) \subset \text{Ker}(u) = \{0_E\}$ donc $u^2 + id_E = \mathcal{O}$.

On a alors $(\det(u))^2 = \det(u^2) = \det(-id_E) = (-1)^3 = -1$ ce qui est impossible car $\det(u) \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a démontré par l'absurde que u n'est pas injectif.

1.(b) • On a $\text{Ker}(u) \neq \{0_E\}$ car u n'est pas injectif donc $\dim(\text{Ker}(u)) \geq 1$.

• $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Ker}(u) \neq E$ car u n'est pas nul, donc $\dim(\text{Ker}(u)) < \dim(E) = 3$.

Finalement on a bien $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.

2. Notons $F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$. • Montrons que $\text{Ker}(u) \cap F = \{0_E\}$.

Si $x \in \text{Ker}(u) \cap F$ alors d'une part $u(x) = 0_E$ car $x \in \text{Ker}(u)$ et d'autre part $u^2(x) = -x$ car $x \in F$. Ainsi $-x = u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x = 0_E$ comme voulu.

• Montrons que $E = \text{Ker}(u) + F$.

Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y = x + u^2(x)$ et $z = -u^2(x)$. Alors on a $u(y) = u(x) + u^3(x) = (u + u^3)(x) = 0_E$ car $u + u^3 = \mathcal{O}$, donc $y \in \text{Ker}(u)$. De plus, $(u^2 + id_E)(z) = -(u^2 + id_E)(u^2(x)) = -(u^3 + u)(u(x)) = 0_E$ et donc $z \in F$.

Ceci prouve que $E = \text{Ker}(u) + F$ et finalement $E = \text{Ker}(u) \oplus F$.

Remarque : on pouvait aussi démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition de x suivant la somme $F + \text{Ker}(u)$.

F et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E , donc $\dim(F) + \dim \text{Ker}(u) = \dim E = 3$ et donc $\dim(F) \in \{1, 2\}$.

3.(a) Soit $x \in F$, montrons qu'on a $u(x) \in F$. Pour cela on calcule : $(u^2 + id_E)(u(x)) = (u^3 + u)(x) = 0_E$ car $u^3 + u = \mathcal{O}$. On a bien $u(x) \in \text{Ker}(u^2 + id_E) = F$.

Remarque : comme on n'a pas utilisé l'hypothèse $x \in F$ dans la preuve précédente, on a en fait démontré que $\text{Im}(u) \subset F$.

3.(b) v est défini par $v = \begin{pmatrix} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix}$. Pour $x \in F$ on a $(u^2 + id_E)(x) = 0_E$ donc $u^2(x) = -x$ donc $v^2(x) = u^2(x) = -x$ ce qui montre que $v^2 = -id_F$.

3.(c) On a $\det(v^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$ mais d'autre part $\det(v^2) = (\det(v))^2 \geq 0$ et donc $\dim(F)$ est pair. Puisque $\dim(F) \in \{1, 2\}$ c'est que $\dim(F) = 2$.

3.(d) On raisonne par l'absurde en supposant que v possède une valeur propre (réelle) notée λ . Alors il existe un vecteur non nul $x \in F$ tel que $v(x) = \lambda x$. On a $v^2(x) = v(v(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$. Mais $v^2 = -id_F$ donc aussi $v^2(x) = -x$. Finalement $\lambda^2 x = -x$ donc $(1 + \lambda^2)x = 0_E$ ce qui est une contradiction puisque $x \neq 0_E$ et $1 + \lambda^2 > 0$.

4.(a) Soient α et β deux réels tels que $\alpha e_2 + \beta e_3 = 0_E$. Montrons que $\alpha = \beta = 0$.

Si $\beta \neq 0$ on peut écrire $v(e_2) = u(e_2) = e_3 = -\frac{\alpha}{\beta} e_2$ et comme $e_2 \neq 0_E$ c'est que le réel $-\frac{\alpha}{\beta}$ est une valeur propre de v , or c'est impossible car v ne possède pas de valeur propre. Ainsi $\beta = 0$ et donc il reste $\alpha e_2 = 0_E$ et comme $e_2 \neq 0_E$ c'est que $\alpha = 0$ comme voulu.

4.(b) ► *1^{re} méthode* : (e_1) est une base de $\text{Ker}(u)$ et (e_2, e_3) une base de F et on a $E = \text{Ker}(u) \oplus F$ donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E car obtenue par concaténation d'une base de $\text{Ker}(u)$ et d'une base de F .

► *2^{de} méthode* : soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$. Montrons que ces réels sont nuls.

On a $e_2 \in F$ et aussi $e_3 = u(e_2) \in F$ car F est stable par u . On a donc $\alpha e_1 = -(\beta e_2 + \gamma e_3) \in F$ car F est un sev de E . Ainsi, $\alpha e_1 \in \text{Ker}(u) \cap F = \{0_E\}$ donc $\alpha e_1 = 0_E$ mais comme $e_1 \neq 0_E$ c'est que $\alpha = 0$.

Il reste $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$ mais comme la famille (e_2, e_3) est libre, c'est dire que $\beta = \gamma = 0$ et on a bien prouvé que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Enfin on a $u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$. Par conséquent, la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de E est

$$[u]_{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. (a) Il s'agit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $[f_\alpha - id_{\mathbb{R}^3}]_{bc} = A_\alpha - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 - \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & \alpha \end{pmatrix}$

est singulière.

- 1^{ère} idée : $\det(A_\alpha - I_3) = \chi_{A_\alpha}(1) = 0$ puisque les premières et troisièmes lignes de $A_\alpha - I_3$ sont opposées.
- 2^{ème} idée : On remarque que les colonnes de $A_\alpha - I_3$ vérifient $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ ce qui prouve que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le vecteur $\boxed{v_1 = (1, 1, -1)}$ est vecteur propre de f_α pour la valeur propre 1.

1. (b) On a $\dim(E_1(\alpha)) = \dim[\text{Ker}(f_\alpha - id_{\mathbb{R}^3})] = 3 - \text{rg}(f_\alpha - id_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \text{rg}(A_\alpha - I_3)$.

Or d'une part la matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible, donc son rang est au plus 2. Elle n'est pas nulle donc son rang est au moins 1. Enfin un mineur d'ordre 2 extrait de $A_\alpha - I_3$ est $\begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ 2 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - 2)$.

- Si $\alpha \notin \{0, 2\}$, $A_\alpha - I_3$ est de rang 2 donc $E_1(\alpha)$ est de dimension 1, et puisqu'il contient $v_1 \neq 0$:

$$\text{Si } \alpha \notin \{0, 2\}, \quad E_1(\alpha) = \mathbb{R}v_1.$$

- Si $\alpha = 0$, $A_0 - I_3$ est de rang 1 donc $E_1(0)$ est de dimension 2. De plus $A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

On constate que le vecteur $\boxed{v_2 = (1, 1, -2)}$ est également vecteur propre de f_0 pour la valeur propre 1, et qu'il est indépendant de v_1 . C'est donc que :

$$E_1(0) = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2.$$

- Si $\alpha = 2$, $A_2 - I_3$ est encore de rang 1 : $E_1(2)$ est de dimension 2. $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On constate alors que le vecteur $\boxed{v_3 = (1, 0, -1)}$ est aussi vecteur propre de f_2 pour la valeur propre 1, et qu'il est indépendant de v_1 . C'est donc que :

$$E_1(2) = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_3.$$

2. (a) La famille (v_1, v_2) est, par définition, génératrice de F . De plus elle est clairement libre, c'est donc une base de F .

2. (b) Il s'agit de démontrer : $\forall x \in F, f_\alpha(x) \in F$ mais puisque f_α est linéaire et que (v_1, v_2) est une base de l'espace vectoriel F , il suffit de démontrer que : $f_\alpha(v_1) \in F$ et $f_\alpha(v_2) \in F$.

Or $f_\alpha(v_1) = v_1 \in F$ et $f_\alpha(v_2) = (1 + \alpha, 1 + \alpha, -\alpha - 2) = \alpha v_1 + v_2 \in F$. F est bien stable par f_α .

2. (c) On vient de voir que $\widetilde{f_\alpha}(v_1) = f_\alpha(v_1) = v_1$ et $\widetilde{f_\alpha}(v_2) = f_\alpha(v_2) = \alpha v_1 + v_2$ d'où la matrice cherchée :

$$[\widetilde{f_\alpha}]_{(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. • 1ère idée : $\chi_{f_\alpha}(\alpha - 1) = \det[f_\alpha - (\alpha - 1)id_{\mathbb{R}^3}]_{bc} = \det(A_\alpha - (\alpha - 1)I_3) = \begin{vmatrix} -\alpha & 2 - \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2 - \alpha & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Ainsi $\alpha - 1$ est valeur propre de f_α pour tout réel α . De plus on constate que les colonnes de $A_\alpha - (\alpha - 1)I_3$ vérifient $C_1 - C_3 = 0$ et donc le vecteur $v_3 = (1, 0, -1)$ est un vecteur propre de f_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$ pour tout réel α .

• 2ème idée : On fait le raisonnement suivant : Si un tel vecteur v_3 existe, alors avec $\alpha = 2$ on doit avoir v_3 vecteur propre de f_2 pour la valeur propre $\alpha - 1 = 1$ et donc nécessairement $v_3 \in E_1(2)$.

En relisant la question 1.(b), on teste naturellement $v_3 = (1, 0, -1)$:

$$f_\alpha(v_3) = (\alpha - 1, 0, 1 - \alpha) = (\alpha - 1)(1, 0, -1) = (\alpha - 1)v_3$$

comme voulu.

4. (a) Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que le déterminant dans la base canonique de

$$\text{cette famille de vecteurs n'est pas nul : } \det_{bc}(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$$\text{La matrice de } f_\alpha \text{ dans cette base est : } [f_\alpha]_{(v_1, v_2, v_3)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

4. (b) Cherchons en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la dimension des espaces propres de f_α .

• Si $\alpha \notin \{0, 2\}$, alors 1 est valeur propre double de f_α et l'espace propre correspondant est $E_1(\alpha)$ qui est de dimension 1. Ça prouve que f_α n'est pas diagonalisable.

• Si $\alpha = 0$, la question précédente prouve que f_0 est diagonalisable et que (v_1, v_2, v_3) est une base de diagonalisation de f_0 .

• Si $\alpha = 2$, toujours d'après la question précédente, 1 est valeur propre triple de f_2 et l'espace propre associé $E_1(2)$ est de dimension 2, donc f_2 n'est pas diagonalisable.

Conclusion : f_α est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha = 0$.

La réduction de A_α s'écrit dans tous les cas (diagonalisation ou trigonalisation) :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$