Séance de révision n$^{\text{o}}$ 1

Intégration sur un segment

Exercice 1

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ où n désigne un entier naturel.

1. (a) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
   (b) En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.
2. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît puis que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $J_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante.
   (c) En déduire l'équivalence $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 2

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt\,.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$.

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Soit x_0 un réel strictement positif. Montrer que $\forall\, x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[\ ,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$.
   (b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$.
4. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que $\forall\, t \in [0,1]\,,\ |e^t - 1| \leqslant Mt$.
   (b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\, dt$. Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer finalement que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$. *Indication* : remarquer que pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{x+t} + g(x)$.

Exercice 3

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Préciser le signe de F sur $\mathbb{R}$. Que vaut $F(0)$? Et $F(1)$?
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 1\,,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x} - e^{-x^2}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice 4

f étant une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles, nous noterons pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

Quelle est la limite de la suite $\big(S_n(f)\big)$? *Aucune démonstration n'est attendue.*

1. Considérons les suites u et v définies par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.
   (a) Montrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n + \dfrac{1}{2}\, u_n = u_{2n}$.
   (c) Montrer alors que la suite v converge vers $\dfrac{\ln 2}{2}$.

Désormais, f désigne une fonction de classe C^∞ sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

2. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que $\forall\, x \in [0,1]\,,\ |f^{(3)}(x)| \leqslant M$.
3. Soit n un entier naturel non nul, k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et t un réel appartenant à $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$.
   (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, t\right]$, montrer que
$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3.$$
   (b) q étant un entier naturel, quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \left(t - \dfrac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$?
   (c) Montrer que
$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.$$
4. n désigne un entier naturel non nul. Montrer que
$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.$$
5. Montrer qu'il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0, et telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$
6. Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,dt + \varepsilon''_n.$$
7. En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,dt + \frac{\delta_n}{n^2}.$$
8. **Application**
   (a) Montrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Montrer que $v_n - \dfrac{\ln 2}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{64n^2}$.
   (d) Comparer la rapidité de convergence des suites u et v.
