Séance de révision n° 2

Intégrales impropres

Exercice 1

On pose $\forall x > 0\,,\ \varphi(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x}\,.$

1. Montrer que φ se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée, encore notée φ, est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$ est convergente.
3. On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a > 0$, $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,dx$.
   Montrer que $I_n(a)$ existe et que l'on a
$$\forall\, a > 0\,,\quad I_n(a) \;=\; \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \;=\; \ln n - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\,.$$
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,dx$ est convergente, et calculer sa valeur.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)\,dx \;=\; H_{n-1} - \ln n$, où on a posé $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$
6. En déduire que
$$\gamma \;=\; \lim_{n\to+\infty} \big(H_n - \ln n\big) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx\,.$$

Exercice 2

u et v étant des réels strictement positifs, on pose
$$B(u,v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt\,.$$

1. (a) Montrer que $B(u,v)$ converge pour tout couple (u,v) de réels strictement positifs.
   (b) Par un changement de variable judicieux, montrer que $B(u,v) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{v-1} t^{u-1}\,dt$.
   (c) Montrer que $B(u,v) = B(v,u)$.
   (d) Démontrer l'égalité suivante : $B(u+1,v) = \dfrac{u}{u+v}\,B(u,v)$.
2. Pour tout entier n strictement supérieur à 1, et tout réel $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.
   (a) Montrer que $I_n(x) = n^x B(n+1,x)$.
   (b) En déduire la valeur de $I_n(x)$ en fonction de n et x uniquement.

Exercice 3

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \rho(x) \qquad \text{avec } |\rho(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$
3. Montrer que pour tout entier $n > 0$ et pour tout $x > 0$,
$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\,\sin\left(x - k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k} + R_n(x) \qquad \text{avec } |R_n(x)| \leqslant \frac{(n-1)!}{x^n}\,.$$

Exercice 4

Soit β un réel strictement positif. On pose $I_\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}$.

1. Montrer que, pour $\beta \leqslant 1$, l'intégrale I_β diverge.
2. On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$. Pour tout entier naturel k, on pose

$$I_{k,\beta} \;=\; \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}\,.$$

   (a) Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{k\geqslant 0} I_{k,\beta}\right)$ et de l'intégrale I_β.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \;\leqslant\; I_{k,\beta} \;\leqslant\; \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,.$$

   (c) Soit C un réel non nul. On pose

$$J \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+C^2\cos^2 x}\,.$$

   À l'aide du changement de variable $t = \tan x$, calculer J.

   (d) Pour quelles valeurs de β l'intégrale I_β est-elle convergente ?

Exercice 5

On pose

$$I = \int_0^1 x^{-x}\,dx\,.$$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $R_n(t) = e^t - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. Montrer que, pour tout réel positif t, $|R_n(t)| \;\leqslant\; \dfrac{t^{n+1}\,e^t}{(n+1)!}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$I \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x\,dx + \int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\,,$$

   où on exprimera $\tilde{R}_n$ à l'aide de la fonction R_n introduite à la question précédente.

4. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in \,]0,1]\,$, l'inégalité $|x \ln x| \leqslant e^{-1}$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\right| \;\leqslant\; \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}\,.$$

5. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x\,dx\,.$$

   (a) Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.

   (b) Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}\,.$$

   (c) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

6. Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}\,.$$