Corrigé de la séance de révision n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1

1. φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car $1-e^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour trouver la limite de φ à droite en 0 on écrit $e^u \underset{0}{=} 1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\circ(u^2)$, donc $1-e^{-x} \underset{0^+}{\sim} x$ et $e^{-x}+x-1 \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On en déduit

$$\forall\, x>0\,,\quad \varphi(x) \;=\; \frac{e^{-x}+x-1}{x(1-e^{-x})} \;\underset{0^+}{\sim}\; \frac{x^2/2}{x^2} \;=\; \frac{1}{2}\,,$$

et donc $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1}{2}$. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$.

La fonction φ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. Un résultat classique de sup montre que φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ce qui évite une étude fastidieuse. En voici une preuve :

▷ $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $\exists\, x_0\in\mathbb{R}_+\,,\,\forall\, x\geqslant x_0\,,\; 0\leqslant\varphi(x)\leqslant 2\,.$

▷ φ est continue sur le segment $[0,x_0]$ donc elle y est bornée : $\exists\, M'\in\mathbb{R}\,,\forall\, x\in[0,x_0]\,,\; |\varphi(x)|\leqslant M'$.

Mais alors $\forall\, x\in\mathbb{R}_+\,,\; |\varphi(x)|\leqslant M=\max(M',2)$ ce qui montre que φ est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2. On écrit l'encadrement $\forall\, x\in\mathbb{R}_+\,,\; 0\leqslant|e^{-x}\varphi(x)|\leqslant Me^{-x}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} Me^{-x}\,dx$ est convergente, on en déduit d'après le théorème de comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Pour $x\geqslant a$ on peut écrire $0\leqslant\dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\leqslant\dfrac{e^{-x}}{x}\leqslant\dfrac{e^{-x}}{a}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a}\,dx$ est convergente, ce qui prouve par comparaison que l'intégrale $I_n(a)$ existe. De même, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{x}\,dx$ existent, donc

$$I_n(a) \;=\; \int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx \;-\; \int_a^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{x}\,dx\,.$$

Dans la dernière intégrale on effectue le changement de variable défini par $t=nx$. L'application $x\mapsto nx$ établit une bijection C^1 de $[a,+\infty[$ sur $[na,+\infty[$ donc l'intégrale obtenue converge aussi et on a

$$I_n(a) \;=\; \int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx-\int_{na}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \;=\; \int_a^{na}\frac{e^{-x}}{x}\,dx \;=\; \int_a^{na}\frac{e^{-x}-1+1}{x}\,dx \;=\; \underbrace{\int_a^{na}\frac{dx}{x}}_{=\ln n}-\int_a^{na}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\,.$$

4. Pour tout réel $x>0$, on a $0\leqslant\dfrac{1-e^{-x}}{x}\leqslant 1$ (tracer la courbe de $x\mapsto e^{-x}$ et/ou faire une étude de fonction) donc, pour tout $a>0$,

$$0 \;\leqslant\; \int_a^{na}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \;\leqslant\; \int_a^{na}1\,dx \;=\; (n-1)a\,,$$

ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^{na}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \xrightarrow[a\to 0^+]{} 0$ et donc, selon la question précédente, $I_n(a)\xrightarrow[a\to 0^+]{}\ln n$.

Cela montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,dx$ est convergente et vaut $\ln n$ (on pouvait aussi montrer directement la convergence de cette dernière intégrale en constatant qu'elle est faussement impropre en 0).

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-x}-e^{-nx})\varphi(x)\,dx$ est convergente d'après la question 2 et un raisonnement analogue. On a alors, en effectuant un éclatement licite puisqu'on connaît déjà la convergence de deux des intégrales,

$$\begin{aligned}
\int_{\to 0}^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})\varphi(x)\,dx &= \int_{\to 0}^{+\infty} \left[\frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\right] dx \\
&= \int_{\to 0}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\,dx \;-\int_{\to 0}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,dx \\
&= \int_{\to 0}^{+\infty} (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-(n-1)x})\,dx \;-\; \ln n \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \;-\; \ln n \;=\; H_{n-1} - \ln n\,.
\end{aligned}$$

On a bien sûr reconnu la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{-x} \neq 1$.

6. Écrivons

$$\begin{aligned}
H_n - \ln n &= \frac{1}{n} + H_{n-1} - \ln n = \frac{1}{n} + \int_{\to 0}^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})\varphi(x)\,dx \\
&= \frac{1}{n} + \int_{\to 0}^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx - \int_{\to 0}^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,dx \quad \text{(éclatement licite)}.
\end{aligned}$$

Pour pouvoir passer à la limite dans cette relation, et trouver la formule annoncée, il suffit de démontrer que

$$\int_{\to 0}^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Or on a $\forall x \in \mathbb{R}_+\,,\ 0 \leqslant |e^{-nx}\varphi(x)| \leqslant Me^{-nx}$, ce qui montre, les intégrales étant convergentes, que

$$0 \;\leqslant\; \left|\int_{\to 0}^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,dx\right| \;\leqslant \int_{\to 0}^{+\infty} \left|e^{-nx}\varphi(x)\right|\,dx \;\leqslant\; M\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx \;=\; \frac{M}{n}\,,$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

Exercice 2

1.(a) Prouvons que l'intégrale (a priori doublement impropre) définissant $B(u,v)$ est convergente :

• en 0 : on a $\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{0^+}{\sim} t^{u-1} = \dfrac{1}{t^{1-u}} \geqslant 0$. S'agissant de fonctions qui gardent un signe constant au voisinage de 0^+, on peut appliquer le critère d'équivalence : les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-u}}$ ont la même nature : convergente d'après le critère de Riemann en 0 car $1-u<1$. L'intégrale est bien sûr faussement impropre en 0 lorsque $u \geqslant 1$.

• en $+\infty$: on a $\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^{u-1}}{t^{u+v}} = \dfrac{1}{t^{1+v}} \geqslant 0$ et pour la même raison, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+v}}$ ont la même nature : convergente d'après le critère de Riemann en $+\infty$ car $1+v>1$.

1.(b) On effectue le judicieux changement de variable défini par $s = \dfrac{t}{1+t}$ et on pose en fait : $t = \eta(s) = \dfrac{s}{1-s} = \dfrac{1}{1-s} - 1$ de sorte que $dt = \dfrac{ds}{(1-s)^2}$. La fonction η définit une bijection C^1 strictement croissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ donc, d'après le théorème du changement de variable pour les intégrales impropres, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\frac{s}{1-s}\right)^{u-1}}{\left(1+\frac{s}{1-s}\right)^{u+v}}\,\frac{ds}{(1-s)^2}$ a même nature et même valeur en cas de convergence (on a montré que c'est le cas) que $B(u,v)$. Après ces précautions nécessaires, on peut enfin écrire

$$B(u,v) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{s}{1-s}\right)^{u-1}}{\left(1+\frac{s}{1-s}\right)^{u+v}}\,\frac{ds}{(1-s)^2} = \int_0^1 \frac{s^{u-1}}{(1-s)^{u-1}} \times \frac{(1-s)^{u+v}}{(1-s)^2}\,ds = \int_0^1 s^{u-1}(1-s)^{v-1}\,ds\,.$$

1.(c) Le changement de variable défini par $t = 1-s$ a toutes les propriétés requises : bijection C^1 de $]0,1[$ dans lui-même. Puisqu'on sait que $B(u,v)$ et $B(v,u)$ convergent, on obtient immédiatement la formule annoncée.

1.(d) Les intégrales $B(u+1,v)$ et $B(u,v)$ sont convergentes, les fonctions dans le crochet sont de classe C^1 et leur produit admet une limite finie en $+\infty$, donc

$$\begin{aligned} B(u+1,v) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^u}{(1+t)^{u+v+1}}\,dt \underset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-1}{u+v}\,\frac{t^u}{(1+t)^{u+v}}\right]_0^{+\infty} + \frac{u}{u+v}\int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt \\ &= 0 + \frac{u}{u+v}\,B(u,v)\,. \end{aligned}$$

2.(a) On utilise le changement de variable évident $t = \nu(s) = ns$ qui est une bijection C^1 de $]0,1[$ sur $]0,n[$: $I_n(x)$ a même nature, et même valeur en cas de convergence, que $\displaystyle\int_0^1 (1-s)^n (ns)^{x-1} n\,ds = n^x B(n+1,x)$.

Ainsi, $I_n(x)$ converge et vaut $n^x B(n+1,x)$.

2.(b) En appliquant en cascade la relation du 1.(d) :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= n^x B(n+1,x) = n^x\,\frac{n}{x+n}\,B(n,x) = n^x\,\frac{n}{x+n}\,\frac{n-1}{x+n-1}\,B(n-1,x) = \cdots \\ &= n^x\,\frac{n}{x+n}\,\frac{n-1}{x+n-1}\times\cdots\times\frac{1}{x+1}\,B(1,x) \end{aligned}$$

ce qu'on peut prouver plus rigoureusement par récurrence. Or $B(1,x) = B(x,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}$ et finalement :

$$\boxed{I_n(x) = \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}\,.$$

Exercice 3

1. Relire le dernier exemple du chapitre 3 : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est absolument convergente lorsque $\alpha > 1$ et semi-convergente lorsque $\alpha \in]0,1]$.

2. Puisque $\dfrac{-\cos t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, le théorème d'IPP nous dit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge et que

$$\forall\, x > 0\,,\quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\,. \tag{1}$$

Puis, à l'aide d'une seconde IPP,

$$\forall\, x > 0\,,\quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\,dt\,,$$

ce qui est la relation demandée avec $\boxed{\rho(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\,dt}$ que l'on majore par IT : $|\rho(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3}\,dt = \frac{1}{x^2}$.

3. • Il s'agit maintenant de poursuivre les IPP. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$,

$$\boxed{R_n(x) = n!\int_x^{+\infty} \frac{\sin\left(t - n\frac{\pi}{2}\right)}{t^{n+1}}\,dt}\,.$$

L'intégrale définissant $R_n(x)$ est absolument convergente d'après le critère de Riemann, et une IPP donne

$$R_n(x) = n!\,\frac{\cos\left(x - n\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}} - (n+1)!\int_x^{+\infty} \frac{\cos\left(t - n\frac{\pi}{2}\right)}{t^{n+2}}\,dt\,,$$

et puisque $\cos(u) = -\sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$,

$$R_n(x) = -n!\,\frac{\sin\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}} + R_{n+1}(x)\,. \tag{2}$$

• On démontre alors, avec cette valeur de $R_n(x)$, la propriété suivante par récurrence sur $n \geqslant 1$:

$$\forall x > 0\,, \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\sin\left(x - k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k} + R_n(x)\,.$$

∘ Vérifions la propriété pour $n = 1$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt &\underset{(1)}{=} \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \\ &= -\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{t^2}\,dt \;=\; -\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} + R_1(x)\,.\end{aligned}$$

∘ Supposons la propriété vraie au rang n, on a alors pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\sin\left(x - k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k} + R_n(x) \\ &\underset{(2)}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\sin\left(x - k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k} - n!\,\frac{\sin\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}} + R_{n+1}(x)\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Reste à constater que $|R_n(x)| \leqslant n! \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}}\,dt = \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Exercice 4

1. Lorsque $\beta \leqslant 1$, on a pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{1+x^\beta} \leqslant \dfrac{1}{1+x^\beta\cos^2 x}$ (car $x^\beta \geqslant 0$ et $\cos^2 x \leqslant 1$).

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ est divergente car $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit d'après le théorème de comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta\cos^2 x}$ est divergente et donc I_β diverge.

2.(a) Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} I_{k,\beta}$ la n-ième somme partielle de la série et pour tout $x \geqslant 0$, $F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{dx}{1+x^\beta\cos^2 x}$ l'intégrale partielle. Par la relation de Chasles on a $S_n = F(n\pi)$.

□ Si I_β converge alors $F(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} I_\beta$ donc par composition $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_\beta$ donc la série converge.

□ Si I_β diverge, puisque F **est croissante** (car l'intégrande est positive), alors $F(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone, donc par composition $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge.

Ainsi, I_β a la même nature que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} I_{k,\beta}$.

2.(b) Puisque $\beta > 0$ par hypothèse, la fonction $x \mapsto x^\beta = e^{\beta\ln x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ($0^\beta = 1$). On a donc, pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$,

$$k^\beta\pi^\beta \leqslant x^\beta \leqslant (k+1)^\beta\pi^\beta \implies 0 < \frac{1}{1+(k+1)^\beta\pi^\beta\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{1+x^\beta\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{1+k^\beta\pi^\beta\cos^2 x}\,,$$

et il ne reste plus qu'à intégrer cet encadrement sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$.

2.(c) Le changement de variable proposé est un C^1-difféomorphisme de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$. On a $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ et $\cos^2 x =$

$\dfrac{1}{1+t^2}$. Comme J est convergente (intégrale propre), elle a donc même valeur que

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{C^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+C^2+t^2} = \frac{1}{1+C^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+C^2} \left[\sqrt{1+C^2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{1+C^2}}}. \end{aligned}$$

2.(d) Notons pour tout entier k, $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}$.

L'intégrande est une fonction π-périodique, donc on peut faire porter l'intégrale « de période » sur tout segment de longueur π, par exemple sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus l'intégrande est paire, donc l'intégrale vaut deux fois celle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Il reste, en utilisant la valeur de J avec $C = k^{\frac{\beta}{2}} \pi^{\frac{\beta}{2}}$,

$$u_k = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+k^\beta\pi^\beta\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+k^\beta\pi^\beta}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}.$$

On a, de la même manière, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+(k+1)^\beta\pi^\beta\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^\beta\pi^\beta}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$.

De l'encadrement de la question 2.(b) on déduit que $I_{k,\beta} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$ et s'agissant de réels positifs, le critère d'équivalence s'applique : $\sum I_{k,\beta}$ a la même nature que $\sum \dfrac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$ qui converge, d'après le critère de Riemann, si et seulement si $\beta > 2$.

Ainsi, I_β converge si et seulement si $\boxed{\beta > 2}$.

Exercice 5

1. La fonction $x \longmapsto x^{-x} = e^{-x\ln x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1, donc l'intégrale I est faussement impropre en 0, donc convergente.

2. On rappelle l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour $n \in \mathbb{N}$ et f de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$, on a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times M_{n+1},$$

où $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Il suffit d'appliquer ceci à la fonction exponentielle sur le segment $[0,t]$ lorsque $t > 0$, le résultat étant évident si $t = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la définition de R_n, pour tout réel t on a $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + R_n(t)$. On applique ceci à $t = -x\ln x$ pour tout $x \in]0,1]$, ce qui donne

$$I = \int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x\ln x)^k}{k!} + R_n(-x\ln x) \right) dx.$$

Toutes les intégrales écrites sont faussement impropres en 0 d'après la limite $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$:

$$I = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^k}{k!}\,dx \right) + \int_0^1 R_n(-x\ln x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x\,dx \right) + \int_0^1 R_n(-x\ln x)\,dx.$$

On obtient la formule de l'énoncé en posant $\forall\, x \in]0,1]$, $\boxed{\tilde{R}_n(x) = R_n(-x\ln x)}$.

4.(a) Posons, pour tout $x \in]0,1]$, $g(x) = x\ln x$.
g est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall\, x \in]0,1]$, $g'(x) = 1 + \ln x$ donc g décroît sur $\left]0, e^{-1}\right]$ et croît sur $[e^{-1}, 1]$.

On a donc $\forall\, x \in \left]0,1\right]\,,\; -e^{-1} \;=\; g(e^{-1}) \;\leqslant\; g(x) \;\leqslant\; 0$, et l'inégalité est démontrée

4.(b) Le réel $t = -x\ln x$ (pour tout $x \in \left]0,1\right]$) étant positif, on peut appliquer l'inégalité de la question 2 :

$$|\tilde{R}_n(x)| \;=\; |R_n(-x\ln x)| \;\leqslant\; \frac{(-x\ln x)^{n+1}e^{-x\ln x}}{(n+1)!}\,.$$

Or on a $\forall\, x \in \left]0,1\right]\,,\; -x\ln x \leqslant e^{-1}$ d'après l'étude de la fonction g, donc, en utilisant la croissance de la fonction exponentielle et de $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\left]0,1\right]$, on obtient

$$|\tilde{R}_n(x)| \;\leqslant\; \frac{(e^{-1})^{n+1}e^{e^{-1}}}{(n+1)!} \;=\; \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}(n+1)!}\,.$$

Il reste à appliquer l'inégalité de la moyenne (bien qu'en fait tout soit positif) :

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\right| \;\leqslant\; \int_0^1 \left|\tilde{R}_n(x)\right|\,dx \;\leqslant\; \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}(n+1)!}\,dx \;=\; \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}(n+1)!}\,.$$

On obtient l'inégalité demandée en majorant habilement $\dfrac{1}{(n+1)!}$ par 1.

5.(a) • Si $p \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $I_{p,q}$ est faussement impropre en 0, donc convergente.

• Si $p = 0$, on écrit la croissance comparée en 0 des fonctions puissances et logarithmes :

$$\forall\, \alpha > 0\,,\; \forall\, \beta \in \mathbb{R}\,,\; x^\alpha(\ln x)^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0\,,$$

donc, avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = q$, $\sqrt{x}\ln^q x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ c'est-à-dire $|\ln^q x| \underset{0^+}{=} \circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. De plus l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente car $\frac{1}{2} < 1$, donc $I_{0,q}$ est (absolument) convergente.

5.(b) On obtient une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$ à l'aide d'une intégration par parties, les trois termes écrits étant convergents d'après ce qui précède :

$$I_{p,q} \;=\; \int_0^1 x^p\ln^q x\,dx \underset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln^q x\right]_0^1}_{=\,0} - \int_0^1 \frac{q}{p+1}\,x^p\ln^{q-1}x\,dx \;=\; -\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}\,.$$

5.(c) On a $\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\; I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$. À l'aide de la relation de récurrence précédente, il vient immédiatement par récurrence sur l'entier q :

$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\quad \boxed{I_{p,q} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}}\,.$$

6. L'identité de la question 3 s'écrit désormais

$$I - \int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx \;=\; \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}I_{k,k} \;=\; \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}(-1)^k\frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \;=\; \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\,.$$

Or, d'après la majoration de la question 4.(b), on a $\displaystyle\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car le majorant est le terme général d'une suite géométrique de raison $e^{-1} \in \left]-1,1\right[$.

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ est convergente et que sa somme vaut I, autrement dit

$$I \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n}\,.$$
