Séance de révision n° 11

Intégrales à paramètre

Exercice 1

On pose, lorsque ça a un sens,

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt\,.$$

1. (a) Montrer que φ est une fonction définie et continue sur $]0, +\infty[$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.
   (b) Établir que φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer en posant $t = 1/u$.
2. (a) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \leqslant \sqrt{u}$ pour tout réel u positif ou nul.
   (b) Montrer que f est correctement définie sur $[0, +\infty[$.
   (c) Soit $A > 0$. Montrer que f est continue sur $[0, A]$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
   (b) Soit x un réel no nul fixé. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $t \neq -\frac{1}{x}$,
   $$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+xt}\,.$$
   (c) En déduire, pour $x > 0$, une expression de $f'(x)$ sans signe intégral.
4. Exprimer f à l'aide de φ. Donner un équivalent simple de f en $+\infty$.
5. (a) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{1+u}$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geqslant f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ? La courbe représentative de f admet-elle une tangente en 0 ?

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}\, e^{-t}\,dt\,.$$

1. Établir l'égalité
   $$\int_0^x \arctan(2t)\,dt = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\,.$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ montrer l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$.
3. Pour $a > 0$, montrer que f est de classe C^2 sur $]-a, a[$. En déduire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x)$.
5. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle définie par
   $$x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln t\,dt \quad ?$$

2. Quel est le domaine de définition de la fonction g de la variable réelle définie par

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t \ln t \, dt \quad ?$$

3. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition (on énoncera avec précision le théorème utilisé).
4. Calculer $xf'(x) + f(x) + \dfrac{1}{x}$ sur son domaine de définition. En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(1)$.
5. Pour A supérieur ou égal à 1, étudier le signe de

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt \right| - (A+1)e^{-A}\,.$$

Pour $t \in\,]0,1]$, donner le signe de $\dfrac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$. Pour $\varepsilon \in\,]0,1]$, a-t-on l'inégalité

$$\left| \int_0^{\varepsilon} e^{-t} \ln t \, dt \right| \leqslant 4\sqrt{\varepsilon} \quad ?$$

Exercice 4

On considère l'application g, définie pour tout réel positif x par

$$g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \, d\theta.$$

et l'application f, définie pour tout réel positif x par

$$f(x) = \int_0^x e^{-u^2} \, du.$$

1. (a) g est-elle continue sur $[\,0, +\infty[$?
   (b) g est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?
2. On définit, pour tout réel positif x, l'application h par

$$h(x) = f^2(x) + g(x)\ .$$

Montrer que h est une application constante (on pourra, pour $g'(x)$, considérer le changement de variable $u = \tan\theta$).

3. (a) Montrer que, pour tout réel positif x,

$$0 \;\leqslant\; g(x) \;\leqslant\; \frac{\pi}{4}\, e^{-x^2}\ .$$

   (b) Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
   En déduire la limite de f en $+\infty$, puis les valeurs des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.