Corrigé de la séance de révision n° 11

Exercice 1

1.(a) Pour $x > 0$, l'intégrale impropre définissant $\varphi(x)$ est convergente : on a $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \underset{0^+}{\sim} \ln t \leqslant 0$ et de plus $\displaystyle\int_0^x \ln t\, dt$ est convergente, donc φ est bien définie. On peut écrire, pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt\,,$$

ce qui montre que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et aussi que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \varphi(1) - \varphi(1) = 0$. On peut donc prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

1.(b) • Dire que φ admet une limite en $+\infty$ revient à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ est convergente, ce qui est bien le cas puisqu'on a $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \underset{+\infty}{=} \circ(t^{-3/2})$ et le critère de Riemann s'applique $(3/2 > 1)$.

• L'application $u \longmapsto \dfrac{1}{u}$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, on peut donc appliquer le théorème du changement de variable pour les intégrales impropres :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt \underset{t=1/u}{=} -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = -\lim_{+\infty} \varphi\,,$$

et donc la limite cherchée est nulle.

2.(a) L'inégalité demandée relève d'une simple étude de fonction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\sqrt{u} - \ln(1+u)\right] = \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{1+u} = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\sqrt{u}(1+u)} \geqslant 0\,, \quad \text{etc.}$$

2.(b) On en déduit que, pour $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}\sqrt{t}}{1+t^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}\,,$$

ce qui montre que l'intégrale définissant $f(x)$ converge d'après les critères de comparaison et de Riemann.

2.(c) Notons $\alpha(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$. La fonction α est continue par rapport à x (à t fixé) et continue par rapport à t (à x fixé), et elle vérifie l'hypothèse de domination sur $[0,A]$:

$$\forall\,(x,t) \in [0,A] \times \mathbb{R}_+\,, \quad 0 \leqslant \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \leqslant \frac{\sqrt{A}\sqrt{t}}{1+t^2} \underset{\text{not.}}{=} \beta(t)\,.$$

La fonction β est indépendante de $x \in [0,A]$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique : f est continue sur $[0,A]$ pour tout $A > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

3.(a) On vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz sur $[\varepsilon, +\infty[$:

– pour tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, l'application $t \longmapsto \alpha(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après 2.(b) ;

– pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \longmapsto \alpha(x,t)$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$;

– pour tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

– $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$ répond à l'hypothèse de domination sur $[\varepsilon,+\infty[$:

$$\forall\,(x,t)\in[\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}_+\,,\quad 0\ \leqslant\ \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\ \leqslant\ \frac{t}{(1+t^2)(1+\varepsilon t)}\ \underset{\text{not.}}{=}\ \gamma(t)\,.$$

La fonction γ est indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+\varepsilon t)}\ \underset{+\infty}{\sim}\ \dfrac{1}{\varepsilon t^2}\geqslant 0$.

Ainsi, f est C^1 et on a droit à la dérivation sous le signe intégral pour $x\in[\varepsilon,+\infty[$. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, donc le résultat vaut sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall\,x>0\,,\quad f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\,dt\,.$$

3.(b) Pour $x\neq 0$, écrivons

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\ =\ \frac{at+b}{1+t^2}+\frac{c}{1+xt}\qquad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\,.$$

En multipliant l'égalité par $1+xt$ et en substituant $-1/x$ à t on obtient $c=\dfrac{-x}{1+x^2}$.
En substituant 0 à t dans l'identité, on obtient $0=b+c$ et donc $b=\dfrac{x}{1+x^2}$.
En multipliant l'égalité par t puis en faisant tendre t vers $+\infty$ on obtient $0=a+c/x$, et finalement

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\ =\ \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{t+x}{1+t^2}-\frac{x}{1+xt}\right)\,.$$

3.(c) Ainsi,

$$\forall\,x>0\,,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t+x}{1+t^2}-\frac{x}{1+xt}\right)dt\,.$$

On ne peut pas éclater l'intégrale car les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t+x}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+xt}\,dt$ sont divergentes, on calcule donc les intégrales partielles. Pour tous x et T strictement positifs,

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(\frac{t+x}{1+t^2}-\frac{x}{1+xt}\right)dt\ &=\ \left[x\arctan t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln(1+xt)\right]_{t=0}^{t=T}\\ &=\ x\arctan T-\ln\left(\frac{1+xT}{\sqrt{1+T^2}}\right)\ \xrightarrow[T\to+\infty]{}\ x\,\frac{\pi}{2}-\ln x\,.\end{aligned}$$

d'où

$$\forall\,x>0\,,\quad f'(x)=\frac{x}{1+x^2}\,\frac{\pi}{2}-\frac{\ln x}{1+x^2}\,.$$

4. Pour tout $x>0$,

$$f(x)\ =\ f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt\ =\ \frac{\pi}{4}\ln(1+x^2)-\varphi(x)\,,$$

d'où

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\ln(x)+\underbrace{\frac{\pi}{4}\ln(1+1/x^2)-\varphi(x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\ \underset{+\infty}{\sim}\ \frac{\pi}{2}\ln(x)\,.$$

5.(a) • Pour $u\geqslant 0$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\big[(1+u)\ln(1+u)-u\big]=\ln(1+u)\geqslant 0$ d'où la première inégalité demandée.

• Pour $x>0$ et $t\geqslant 0$, on a donc $\dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\geqslant\dfrac{xt}{(1+t^2)(1+xt)}$ et en intégrant l'inégalité sur $\mathbb{R}_+$ (les deux intégrales convergent) on obtient $f(x)\geqslant xf'(x)$ comme voulu.

5.(b) D'après l'expression de $f'(x)$ trouvée à la question 3.(c), on a $f'(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$ donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$ ce qui montre que f n'est pas dérivable en 0 et que sa courbe représentative possède en ce point une tangente verticale.

Exercice 2

1. On effectue une intégration par parties, possible car les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \arctan(2t)$ sont de classe C^1,

$$\int_0^x 1 \times \arctan(2t)\, dt \underset{\text{IPP}}{=} \Big[t \arctan(2t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+4t^2}\, dt = \Big[t\arctan(2t) - \frac{1}{4}\,\ln(1+4t^2)\Big]_0^x,$$

ce qui est la formule demandée.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$ l'inégalité demandée est évidente, sinon on applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction sin, qui est de classe C^1 sur le segment, noté S, d'extrémités 0 et x. On obtient

$$|\sin x| = |\sin x - \sin 0| \leqslant |x - 0| \times \underbrace{\max_{t \in S} |\sin' t|}_{\leqslant 1} \leqslant |x|\,.$$

3. • Montrons que f est de classe C^1 sur $J \underset{\text{not}}{=}]-a, a[$ et que f' se calcule par dérivation sous le signe intégral.

On pose $\forall\,(x,t) \in J \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) = \dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}\, e^{-t}$, et on vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz :

– Pour tout $x \in J$, l'application $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  En effet, l'intégrale définissant $f(x)$ est absolument convergente, donc convergente, car

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant \left|\frac{\sin^2(xt)}{t^2}\, e^{-t}\right| \underset{(2.)}{\leqslant} x^2 e^{-t},$$

  et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-t}\, dt$ est convergente.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur J.

– Pout tout $x \in J$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t}\, e^{-t} = \dfrac{\sin(2xt)}{t}\, e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Enfin, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination : pour tout $(x,t) \in J \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\sin(2xt)}{t}\, e^{-t}\right| \underset{(2.)}{\leqslant} 2|x|e^{-t} \leqslant 2ae^{-t},$$

  et la fonction $t \mapsto 2ae^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur J, et que

$$\forall\, x \in J, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t}\, e^{-t}\, dt\,.$$

• On montre de même que f' est de classe C^1 sur J et que f'' se calcule par dérivation sous le signe intégral. La démarche est identique, avec cette fois

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = 2\cos(2xt)e^{-t} \quad \text{avec} \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2e^{-t},$$

et la fonction $t \mapsto 2e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Enfin, puisque f est de classe C^2 sur tout intervalle de la forme $]-a, a[$ avec $a > 0$, elle l'est sur $\bigcup_{a>0}]-a, a[= \mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt)e^{-t}\, dt\,.$$

4. Notons $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{2ixt-t}\, dt$ pour tout réel x. L'intégrale $I(x)$ est absolument convergente, donc convergente, car pour tout réel t on a $0 \leqslant |2e^{2ixt-t}| = 2e^{-t}$. Or $I(x) = \left[\dfrac{2e^{2ixt-t}}{2ix-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{1-2ix} = 2\dfrac{1+2ix}{1+4x^2}$ et $f''(x) = \Re e(I(x)) = \dfrac{2}{1+4x^2}$.

5. On en déduit, grâce à la formule établie à la question 1, qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax + B + x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\,.$$

De plus, on a $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, ce qui donne les constantes $A=B=0$, d'où finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2).$$

Exercice 3

1. On cherche les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale impropre définissant $f(x)$ est convergente.
Notons $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h(t) = e^{-xt}\ln t$.

• On a $h(t) \underset{0^+}{\sim} \ln t$ donc, s'agissant de fonctions qui gardent un signe constant au voisinage de 0, $\displaystyle\int_0^1 h$ a la même nature que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$, qui est une intégrale convergente d'après le cours. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 h$ converge.

• Si $x>0$, on a la domination $h(t) \underset{+\infty}{=} \circ\big(e^{-\frac{x}{2}t}\big)$ (d'après les croissances comparées) et puisque les fonctions sont positives pour $t \geqslant 1$, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}t}\,dt$ est convergente d'après le cours, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h$ est convergente.

• Si $x \leqslant 0$, on a $h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} h$ diverge.

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On reprend l'étude de la question précédente, avec la fonction $k : t \longmapsto e^{-xt}\,t\ln t$.

• On a $k(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 k$ est faussement impropre, donc convergente.

• Si $x>0$, on a encore la domination $k(t) \underset{+\infty}{=} \circ\big(e^{-\frac{x}{2}t}\big)$, et la même conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} k$ converge.

• Si $x \leqslant 0$, on a de même $k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} k$ diverge.

Conclusion : g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz pour la fonction f. Posons, $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \alpha(x,t) = e^{-xt}\ln t$.
▹ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $t \longmapsto \alpha(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme on l'a montré à la question 1.
▹ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $x \longmapsto \alpha(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction usuelle).
▹ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t) = -k(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction usuelle)
▹ Enfin, l'application $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination (locale) sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. En effet, considérons un réel $a>0$, et effectuons la majoration suivante :

$$\forall x \in\ [a,+\infty[\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t)\right| = \left|e^{-xt}\,t\ln t\right| \leqslant e^{-at}t|\ln t| \underset{\text{not.}}{=} \varphi(t).$$

L'application φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme on l'a montré à la question 2.
On en déduit que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et qu'on a droit à la dérivation sous le signe intégral sur cet interval. Comme c'est vrai pour tout $a>0$, on en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,t\ln t\,dt = -g(x).$$

4. Effectuons une intégration par parties à partir de f. Les fonctions $t \longmapsto e^{-xt}$ et $t \longmapsto t\ln t - t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et leur produit admet une limite finie (nulle) en 0^+ et en $+\infty$, donc

$$\forall x>0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln t\,dt = \Big[e^{-xt}(t\ln t - t)\Big]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-xt}(t\ln t - t)\,dt = -xf'(x) - x\int_0^{+\infty} te^{-xt},$$

par un éclatement justifié, puisque les intégrales sont convergentes. La dernière intégrale écrite se calcule facilement (nouvelle intégration par parties) et vaut $\dfrac{1}{x^2}$, ce qui donne

$$\forall\, x > 0\,, \quad f(x) \;=\; -xf'(x) - \frac{1}{x}\,, \qquad \text{donc} \qquad xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x} \;=\; 0\,.$$

On résout ensuite l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et résolue (E) $y' = -\dfrac{1}{x}\,y - \dfrac{1}{x^2}$ dont f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

La solution générale de l'équation homogène s'écrit $y(x) = Ae^{-\ln x} = \dfrac{A}{x}$ où A est une constante réelle arbitraire.

Une solution particulière est donnée par la méthode de variation de la constante, et on trouve sans peine $y(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$.

La solution générale de (E) s'écrit donc $y(x) = \dfrac{A - \ln x}{x}$, $(A \in \mathbb{R})$. Comme $A = y(1)$, on obtient donc

$$\forall\, x > 0\,, \quad f(x) \;=\; \frac{f(1) - \ln x}{x}\,.$$

Remarque : la méthode employée ici semble un peu stupide, car le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale définissant $f(x)$ donne immédiatement cette expression.

5. • Puisque $A \geqslant 1$, la valeur absolue est superflue. Notons, pour tout $A \geqslant 1\,,\ F(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt - (A+1)e^{-A}\,.$

La fonction F ainsi définie est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et on a

$$\forall\, A \geqslant 1\,, \quad F'(A) = -e^{-A}\ln A - e^{-A}(1 - A - 1) \;=\; e^{-A}(A - \ln A) \;\geqslant\; 0\,,$$

donc F est croissante, et comme $F(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ (croissances comparées), on en déduit que $\forall\, A \geqslant 1\,,\ F(A) \leqslant 0\,.$

• La fonction $t \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$ est dérivable sur $]0, 1]$ et sa dérivée est $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant 0\,.$

Elle est donc décroissante, et prend la valeur 2 en 1, donc elle reste positive sur $]0, 1]$, d'où $\forall\, t \in]0, 1]\,,\ -\dfrac{2}{\sqrt{t}} \leqslant \ln t \leqslant 0\,.$

• Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, et pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, on a

$$0 \;\leqslant\; e^{-t}(-\ln t) \;\leqslant\; \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}} \;\leqslant\; \frac{2}{\sqrt{t}}\,.$$

De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente d'après le critère de Riemann en 0, donc par intégration de l'encadrement,

$$\forall\, \varepsilon \in]0, 1]\,, \quad \left|\int_0^{\varepsilon} e^{-t}\ln t\,dt\right| \;=\; \int_0^{\varepsilon} e^{-t}(-\ln t)\,dt \;\leqslant\; \int_0^{\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt \;=\; 4\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Exercice 4

1.(a) g est une intégrale (propre) dépendant d'un paramètre : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \psi(x,\theta)\,d\theta$ où on a posé : $\psi(x,\theta) = e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ pour tout $(x,\theta) \in D \underset{\text{not.}}{=} \mathbb{R} \times [0, \pi/4]$. Or ψ est continue (en tant que fonction de deux variables) sur D d'après les théorèmes généraux :
▷ $(x,\theta) \mapsto -x^2$ est continue sur D car polynomiale.
▷ $(x,\theta) \mapsto \cos^2\theta$ est continue sur D comme la composée de la fonction usuelle $u \mapsto \cos^2 u$ continue sur $\mathbb{R}$ et de $(x,\theta) \mapsto \theta$ qui est continue sur D (seconde projection).
▷ $(x,\theta) \mapsto -\frac{x^2}{\cos^2\theta}$ est donc continue sur D comme quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.
▷ Enfin, ψ est la composée de la fonction exponentielle et de la fonction précédente, elle est donc continue sur D.

D'après le théorème du cours concernant la continuité des intégrales *propres* à paramètre, g est continue sur $\mathbb{R}$.

1.(b) ψ possède une dérivée partielle par rapport à x qui est

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta) = -\frac{2x}{\cos^2\theta}\,e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$$

et, de même que précédemment, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ est continue sur D (en tant que fonction de deux variables). D'après le corollaire du théorème de Leibniz concernant la dérivation des intégrales *propres* à paramètre, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a droit à la dérivation sous le signe somme :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad g'(x) = -2x \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}}{\cos^2\theta}\, d\theta\,.$$

2. Posons $u = \tan\theta$ dans l'expression de $g'(x)$. On a $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + u^2$ et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)}\, du = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2u^2}\, du\,.$$

On pose ensuite $t = xu$ dans la dernière intégrale écrite, il vient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = -2f(x)f'(x)\,,$$

ce qui montre que $h = f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée y est nulle ($\mathbb{R}$ est un intervalle).

Notons que la valeur de cette constante est $h(0) = f^2(0) + g(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

3.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$ on a $-\dfrac{x^2}{\cos^2\theta} \leqslant -x^2$ et donc en composant par la fonction exponentielle, croissante et positive,

$$\forall\, \theta \in [0, \pi/4]\,, \quad 0 \leqslant \psi(x,\theta) \leqslant e^{-x^2}.$$

On intègre cet encadrement sur $[0, \pi/4]$, il vient

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\, e^{-x^2}.$$

3.(b) D'après l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, on a $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On a d'une part $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} I$ donc $f^2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} I^2$ et d'autre part $f^2(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$.

Par unicité de la limite il vient donc $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ ou encore, puisque I est positif,

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$
