

SÉANCE DE RÉVISION N° 10

Géométrie dans l'espace

Exercice 1

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit α un réel.

1. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

- (a) Quelle est la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}$ et un plan d'équation $z = \alpha$? (on pourra séparer plusieurs cas en fonction des valeurs du paramètre α).
Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les points d'intersection entre la courbe et les axes de coordonnées).
- (b) Quelle est la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}$ et un plan d'équation $x = \alpha$?
Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les éléments caractéristiques de la courbe : sommets, asymptotes, etc.).

2. On considère la surface $\mathcal{S}_1$ d'équation

$$y^2 + 2xz - 2x = 0.$$

On note $\mathcal{P}_1$ l'intersection entre $\mathcal{S}_1$ et le plan xOy . Quelle est la nature de $\mathcal{P}_1$?

3. Donner une équation cartésienne de la surface $\mathcal{C}_1$ formée des droites passant par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, et rencontrant la courbe $\mathcal{P}_1$.
4. Soit A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) , $z_A \neq 0$. On désigne par $\mathcal{C}_A$ la surface formée des droites passant par le point A et rencontrant la courbe $\mathcal{P}_1$.
- (a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}_A$.
- (b) À quelle condition sur (x_A, y_A, z_A) le point B de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient-il à $\mathcal{C}_A$?
- (c) Déterminer l'ensemble des points A de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition précédente.

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équations

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 - z^2 = 4. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$?
2. Montrer que la surface $\mathcal{S}$, engendrée par les droites D , assujetties à rencontrer l'axe $(O; \vec{k})$ et la courbe $\mathcal{H}$, tout en restant parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation

$$y^2 = x^2(z^2 + \beta^2),$$

où β est un réel que l'on déterminera.

Les candidats qui n'ont pas trouvé la valeur de β sont invités à composer en gardant β comme paramètre.

3. Donner une équation de la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $x = b$, où b désigne un réel.
En déduire la nature de cette section ainsi que le lieu de ses sommets et de ses foyers.
On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $x = 0$.
4. Donner une équation de la section $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = c$, où c désigne un réel.

5. On paramètre $\mathcal{S}_0$ par
- $$\begin{cases} x(t) = \frac{c}{2} \times \cos t \\ y(t) = c \\ z(t) = 2 \tan t \end{cases} \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

On définit la courbure en un point de $\mathcal{S}_0$ de paramètre t par

$$\Delta(t) = x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t).$$

Les points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$ sont les points de paramètre t en lesquels la courbure s'annule en changeant de signe.
Déterminer la courbure au point de paramètre t .

En déduire le lieu des points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$. On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $y = 0$.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et a désigne un réel strictement positif.

Pour tout réel $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère les points P et Q de coordonnées respectives $(a \sin \varphi, 0, a \cos^2 \varphi)$ et $(0, a \cos \varphi, a \cos^2 \varphi)$.

Soient $HPRQ$ le rectangle dont le plan est parallèle à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et tel que H soit sur $(O, \vec{k})$ et $Oprq$ sa projection orthogonale sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer la nature des arcs décrits par P et Q et r lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Placer sur une figure à main levée les points et les arcs précédemment définis et indiquer une signification géométrique du paramètre φ .
- Soit M la projection orthogonale de H sur (PQ) et Γ_1 l'arc décrit par M lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On note P_0 le point de coordonnées $(0, 0, a)$.
 - Calculer les coordonnées de M en fonction de φ .
 - Montrer que Γ_1 est situé sur la sphère de diamètre $[OP_0]$.
 - Déterminer l'équation polaire de la projection γ_1 de Γ_1 sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le pôle étant O et l'axe polaire $(O, \vec{i})$.
 - Montrer que γ_1 admet un axe de symétrie.
- Soit N la projection orthogonale de R sur (PQ) et Γ_2 l'arc décrit par N lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - Calculer les coordonnées de N en fonction de φ .
 - Montrer que la droite (pq) est tangente à la projection orthogonale γ_2 de Γ_2 sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - Prouver que les tangentes à Γ_2 font un angle constant avec la direction $\vec{k}$.
 - Calculer la longueur de Γ_2 .

Exercice 4

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D et D' d'équations respectives

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4z = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4z = 1 \end{cases}.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2.$$

- Déterminer la nature des courbes obtenues en coupant $\mathcal{P}$ successivement par les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $z = 1$.
- Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$. Combien y a-t-il de droites passant par M_0 entièrement incluses dans $\mathcal{P}$? On donnera un vecteur directeur de chacune de ces droites.
- Quel est l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ par lesquels passent deux droites orthogonales et incluses dans $\mathcal{P}$?
- Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de l'espace équidistants des droites D et D' .