Séance de révision n° 12

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

Exercice 1

Soit E un espace euclidien. On suppose $\dim E \geqslant 2$. On note $\langle u|v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v et $||u||$ la norme du vecteur u. On se donne un vecteur a de E de norme 1 et, pour tout réel $\alpha \neq 0$, on pose, pour tout $x \in E$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha \langle x|a\rangle a.$$

1. Vérifier que f_α est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tous réels non nuls α, β, on a $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.
3. Montrer que pour tous vecteurs x et y, on a $\langle x|f_\alpha(y)\rangle = \langle f_\alpha(x)|y\rangle$.
4. Vérifier que a est un vecteur propre de f_α.
5. Montrer que 1 est valeur propre de f_α. Quel est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?
   L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
6. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.
7. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.
8. En utilisant la question 3, montrer que si F est un sous-ev de E stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.

Exercice 2

E est un espace vectoriel réel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. La norme du vecteur x est notée $||x||$.
On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux.

Soit p un projecteur de E.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors

$$\forall\, u \in E\,, \quad ||p(u)|| \leqslant ||u|| \qquad (\star)$$

2. Montrer que si la condition $(\star)$ est vérifiée alors p est un projecteur orthogonal.

Exercice 3

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On désigne par F l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\forall\, i \in [\![1,n]\!]\,, \forall\, t \in [a,b]\,,\ f_i(t) = \sin(it)$ et on considère la famille $G = \{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de F.

1. Montrer que l'application $\varphi : F\times F \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \langle\, f, g\,\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur F.
2. On pose $a = 0$ et $b = 2\pi$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt$ pour p et q entiers naturels.
   En déduire que la famille G est libre dans F.
3. On pose $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.
   Soient $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i$ et $g = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i f_i$ deux éléments de F. Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre n telle que

$$\langle\, f, g\,\rangle \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,dt \;=\; X^T A Y \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}.$$

   La famille G est-elle une famille orthogonale pour le produit scalaire φ ?

Exercice 4

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie par

$$\forall\,(P,Q)\in E\times E \qquad \varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ de E et une seule telle que

$$\forall\,i\in\{0,1,2,3\}\qquad \mathrm{Vect}(\pi_0,\ldots,\pi_i)=\mathrm{Vect}(1,X,\ldots,X^i)\quad \text{et}\quad \varphi(\pi_i,X^i)>0$$

   puis déterminer les quatre polynômes π_0,π_1,π_2,π_3.
3. Soit $P\in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\big[P(t)\big]^2\,dt=1$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^4$ tels que $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\pi_i$.
   (b) Sans déterminer les réels α_i, déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\alpha_i^2$.
   (c) i. Soient (a,b,c,d) et (a',b',c',d') deux quadruplets de réels. Montrer que

$$|aa'+bb'+cc'+dd'|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}\,.$$

   ii. En déduire que

$$\forall\,x\in\mathbb{R}\qquad |P(x)|\leqslant\sqrt{\sum_{i=0}^{3}\big[\pi_i(x)\big]^2}\,.$$

   (d) En étudiant, pour tout k de $\{0,1,2,3\}$, $\mathrm{Sup}\,\{\pi_k(x)\,,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$, montrer

$$\mathrm{Sup}\,\{|P(x)|\,,|x|\leqslant 1\}\ \leqslant\ 2\sqrt{2}\,.$$

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^n$, on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel et $||\ \ ||$ la norme associée.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique, notée $A=(a_{ij})$ vérifie

$$a_{ij}>0 \text{ pour tout } i \text{ et tout } j \text{ variant de 1 à } n.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{E}$. f étant symétrique, on rappelle que ses valeurs propres sont réelles. Soit α la plus grande d'entre elles.

1. (a) En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres, établir l'inégalité

$$\langle\, f(x),x\,\rangle\leqslant\alpha\,||x||^2 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^n\,.$$

   (b) Montrer que l'égalité n'est atteinte que si x est nul ou est un vecteur propre associé à α.
   (c) En utilisant $\hat{x}=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, montrer de plus l'inégalité

$$|\,\langle\, f(x),x\,\rangle\,|\leqslant\alpha\,||x||^2 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^n\,.$$

2. (a) Établir que $\alpha>0$.
   (b) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors on a $|\lambda|\leqslant\alpha$.
3. Soit $x=(x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur propre associé à α, montrer que $\hat{x}=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ est aussi un vecteur propre associé à α.
