Corrigé de la séance de révision n° 12

Exercice 1

1. f_α est bien définie de E dans E et on vérifie facilement sa linéarité.

2. Soit x dans E, on a

$$\begin{aligned} f_\alpha(f_\beta(x)) &= f_\beta(x) + \alpha \langle f_\beta(x)|a\rangle a \ = \ x + \beta \langle x|a\rangle a + \alpha \langle x + \beta \langle x|a\rangle a|a\rangle a \\ &= x + \beta \langle x|a\rangle a + \alpha \langle x|a\rangle a + \alpha\beta \langle x|a\rangle \underbrace{\langle a|a\rangle}_{=1} a \\ &= x + (\alpha+\beta+\alpha\beta) \langle x|a\rangle a \ = \ f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}(x)\,. \end{aligned}$$

C'est donc aussi égal à $f_\beta(f_\alpha(x))$ en échangeant le rôle des lettres α et β.

3. On a $\langle x|f_\alpha(y)\rangle = \langle x|y + \alpha \langle y|a\rangle a\rangle = \langle x|y\rangle + \alpha \langle x|a\rangle \langle y|a\rangle$ et le résultat est symétrique en les lettres x et y, donc ça vaut autant $\langle y|f_\alpha(x)\rangle$ ou encore $\langle f_\alpha(x)|y\rangle$.

4. $f_\alpha(a) = (1+\alpha)a$ (car $||a|| = 1$) et a n'est pas nul donc c'est un vecteur propre de f_α pour la valeur propre $1+\alpha$.

5. $(f_\alpha - id_E)(x) = \alpha \langle x|a\rangle a$, donc $\mathrm{Ker}(f_\alpha - id_E) = \{x \in E\,,\ \langle x|a\rangle = 0\} = (\mathbb{R}.a)^\perp$. Ce noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ car $\dim E \geqslant 2$ donc 1 est bien valeur propre de f_α et l'espace propre associé est $(\mathbb{R}.a)^\perp$ qui a pour dimension $n-1$.

L'endomorphisme f_α est diagonalisable car c'est un endomorphisme symétrique réel (question 3).
Autre méthode : la somme des dimensions des espaces propres est au moins (et donc exactement) $1+n-1 = n = \dim E$.
Notons quand même que les valeurs propres 1 et $1+\alpha$ sont bien distinctes ($\alpha \neq 0$).

6. Notons $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $(\mathbb{R}.a)^\perp$. Alors $\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise f_α. En effet, la matrice de f_α dans cette base est

$$[\ f_\alpha\ ]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det(f_\alpha) = 1+\alpha$ donc f_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq -1$. Dans ce cas, en utilisant l'expression de la question 2 : $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$ ou bien en inversant cette matrice diagonale, on voit que $(f_\alpha)^{-1} = f_\beta$ ou β est tel que $1+\beta = \dfrac{1}{1+\alpha}$ c'est-à-dire $\beta = \dfrac{-\alpha}{1+\alpha}$. Ainsi, $\boxed{\forall\, \alpha \neq -1\,,\ (f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}}$.

7. f_α est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base **orthonormée** de E est une matrice orthogonale. Or la précédente matrice est orthogonale si et seulement si $1+\alpha = \pm 1$ c'est-à-dire $\boxed{\alpha = -2}$ (car α ne peut être nul).

La matrice de f_{-2} est celle de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}.a)^\perp$.

8. Soit F sev de E stable par f_α, montrons que $F^\perp$ est encore stable par f_α : soit $x \in F^\perp$, montrons que $f_\alpha(x) \in F^\perp$.
Il s'agit de démontrer que

$$\forall\, y \in F\,,\ \langle f_\alpha(x)|y\rangle = 0.$$

D'après la question 3, ceci vaut $\big\langle f_\alpha(y)|x\big\rangle$. Or $f_\alpha(y) \in F$ (car $y \in F$ et F est stable) et $x \in F^\perp$, donc le dernier produit scalaire écrit est bien nul.

Exercice 2

1. Pour $u \in E$ on écrit $u = \big[u - p(u)\big] + p(u)$, avec $u - p(u) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$.

Comme $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$ c'est que $\langle\, u - p(u), p(u)\,\rangle \underset{(\diamondsuit)}{=} 0$.

► *1re méthode* :

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= \big|\big|\big[u - p(u)\big] + p(u)\big|\big|^2 \;=\; ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2 + 2\,\langle\, u - p(u), p(u)\,\rangle \\ &\underset{(\diamondsuit)}{=} ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2 \\ &\geqslant ||p(u)||^2 \,. \end{aligned}$$

► *2de méthode* :

$$||p(u)||^2 \;=\; \langle\, p(u), p(u)\,\rangle \underset{(\diamondsuit)}{=} \langle\, u, p(u)\,\rangle \underset{\mathrm{CS}}{\leqslant} ||u|| \cdot ||p(u)||$$

d'où le résultat en divisant par $||p(u)||$ si celui-ci n'est pas nul, le résultat étant évident dans le cas contraire.

2. Pour montrer que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ on choisit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$ arbitraires et on montre que $x \perp y$.
On a $p(x) = x$ et $p(y) = 0$, donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'hypothèse $(\star)$ appliquée à $u = x + \lambda y$ donne

$$||x||^2 = ||p(x + \lambda y)||^2 \leqslant ||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + \lambda^2\, ||y||^2 + 2\lambda\,\langle\, x, y\,\rangle \,.$$

Ainsi,

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda^2\, ||y||^2 + 2\lambda\,\langle\, x, y\,\rangle \geqslant 0\,.$$

Pour $\lambda > 0$, en divisant par λ et en faisant tendre λ vers 0^+ on obtient $\langle\, x, y\,\rangle \geqslant 0$. De même pour $\lambda < 0$, en divisant par λ et en faisant tendre λ vers 0^- on obtient $\langle\, x, y\,\rangle \leqslant 0$ et finalement on a bien $\langle\, x, y\,\rangle = 0$ et p est un projecteur orthogonal.

Exercice 3

1. Voir le cours pour les vérifications usuelles.

2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$ et $p \neq q$ on a $p + q \neq 0$ et $p - q \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} \langle\, f_p, f_q\,\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((p-q)t\big) - \cos\big((p+q)t\big)\,dt \\ &\underset{\substack{p+q\neq 0\\ p-q\neq 0}}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((p-q)t\big)}{p-q} - \frac{\sin\big((p+q)t\big)}{p+q}\right]_0^{2\pi} \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Pour $p = q \neq 0$, on a

$$\langle\, f_p, f_q\,\rangle \;=\; \int_0^{2\pi} \sin^2(pt)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2pt)\,dt \;=\; \pi\,.$$

Enfin, pour $p = q = 0$, le résultat vaut évidement 0.
La famille $G = \{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale, et comme est est constitué de vecteurs **non nuls**, elle est libre d'après le cours.

3. Notons $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a d'une part, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle\, f, g\,\rangle \;=\; \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{j=1}^n y_j f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j\,\langle\, f_i, f_j\,\rangle \,.$$

D'autre part, le calcul de $X^T A Y$ donne

$$X^T A Y \;=\; \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix} \;=\; \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij}\,.$$

L'égalité sera donc obtenue si on choisit de poser $\forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\; a_{ij} = \langle\, f_i, f_j\,\rangle\,.$

On voit donc que G est une famille orthogonale pour le produit scalaire φ si et seulement la matrice A est diagonale. Or par exemple

$$a_{21} = \langle f_2, f_1 \rangle = \frac{1}{2}\left[\sin(t) - \tfrac{1}{3}\sin(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \neq 0\,,$$

donc G n'est pas orthogonale pour le produit scalaire φ.

Exercice 4

1. Voir le cours pour les vérifications usuelles.

2. L'unique base $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E répondant au problème est celle obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E. Dans les calculs qui suivent on utilise l'identité, valable pour k et ℓ entiers naturels :

$$\varphi(X^k, X^\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k+\ell \text{ est impair}\,, \\ \frac{2}{k+\ell+1} & \text{si } k+\ell \text{ est pair}\,. \end{cases}$$

- $||1||^2 = \varphi(1,1) = 2$ donc $\pi_0 = \dfrac{1}{||1||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On note $\boxed{\pi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
- $\pi_1^* = X - \varphi(X, \pi_0)\,\pi_0 = X$ car $\varphi(X, 1) = 0$. Puis $||\pi_1^*||^2 = \varphi(\pi_1^*, \pi_1^*) = \dfrac{2}{3}$. On a donc $\boxed{\pi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,X}$.
- $\pi_2^* = X^2 - \varphi(X^2, \pi_1)\,\pi_1 - \varphi(X^2, \pi_0)\,\pi_0 = X^2 - \frac{1}{2}\,\varphi(X^2, 1) = X^2 - \frac{1}{3}$. Puis,

$$||\pi_2^*||^2 = \varphi(\pi_2^*, \pi_2^*) = \varphi(\pi_2^*, X^2) = \varphi(X^2, X^2) - \frac{1}{3}\,\varphi(1, X^2) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}\,.$$

On a donc $\boxed{\pi_2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)}$.

- $\pi_3^* = X^3 - \varphi(X^3, \pi_2)\,\pi_2 - \varphi(X^3, \pi_1)\,\pi_1 - \varphi(X^3, \pi_0)\,\pi_0 = X^3 - \frac{3}{2}\,\varphi(X^3, X)X = X^3 - \frac{3}{5}\,X$. Puis,

$$||\pi_3^*||^2 = \varphi(\pi_3^*, \pi_3^*) = \varphi(\pi_3^*, X^3) = \varphi(X^3, X^3) - \frac{3}{5}\,\varphi(X, X^3) = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{7 \times 25}\,.$$

On a donc $\boxed{\pi_3 = \dfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(X^3 - \dfrac{3}{5}\,X\right)}$.

3.(a) Puisque $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est une base de E, l'élément P de E se décompose dans cette base.

3.(b) D'une part, on a $||P||^2 = \left|\left|\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$ car la base $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est orthonormale ; et d'autre part $||P||^2 = \varphi(P, P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[P(t)\right]^2 dt = 1$ d'après l'hypothèse. On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2 = 1}$.

3.(c) i. Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux deux quadruplets (a, b, c, d) et (a', b', c', d') de $\mathbb{R}^4$, pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$.

3.(c) ii. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On applique l'inégalité précédente à $(a, b, c, d) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_3)$ et $(a', b', c', d') = \big(\pi_0(x), \ldots, \pi_3(x)\big)$, ce qui donne le résultat escompté :

$$|P(x)| = |\alpha_0 \pi_0(x) + \cdots + \alpha_3 \pi_3(x)| \leqslant \underbrace{\sqrt{\alpha_0^2 + \cdots + \alpha_3^2}}_{=1}\ \sqrt{\pi_0(x)^2 + \cdots + \pi_3(x)^2}\,.$$

3.(d) Il apparaît après un rapide coup d'œil (et une étude de fonction simplette pour π_3) que chaque $|\pi_i|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en 1 et -1, ce maximum valant respectivement $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

On a donc

$$\forall\, x \in [-1,1]\,, \quad |P(x)| \;\leqslant\; \sqrt{\pi_0(x)^2 + \cdots + \pi_3(x)^2} \;\leqslant\; \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}} \;=\; 2\sqrt{2}\,.$$

Exercice 5

1.(a) f étant un endomorphisme symétrique **réel**, il existe une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f. Notons α_i la valeur propre associée à v_i. On décompose un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ dans cette base : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.
On a alors, par linéarité, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i v_i$, donc

$$\langle\, f(x), x\,\rangle \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^2 \underset{(*)}{=} \alpha\,||x||^2$$

(*) car la base $(v_1,\ldots,v_n)$ est orthonormée.

1.(b) L'égalité est évidemment atteinte si x est dans l'espace propre associé à α. Réciproquement, si il y a égalité dans l'inégalité précédente, c'est que

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha-\alpha_i)\,x_i^2}_{\geqslant 0} \;=\; 0\,,$$

et donc chacun des termes de cette somme est nulle : $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\,,\,(x_i = 0 \text{ ou } \alpha_i = \alpha)$.
Notons alors I l'ensemble (éventuellement vide) des indices $i \in \{1,\ldots,n\}$ tels que $x_i \neq 0$. On peut écrire

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \;=\; \sum_{i\in I} x_i v_i \quad \text{ et } \quad f(x) \;=\; \sum_{i\in I} \alpha_i x_i v_i \;=\; \sum_{i\in I} \alpha x_i v_i \;=\; \alpha x\,.$$

Ainsi, x est dans l'espace propre associé à α. Notez que x peut être nul et dans ce cas ça n'est pas un vecteur propre pour α.

1.(c) Notons $x = (x_1,\ldots,x_n)$ dans la base canonique. Alors dans cette même base canonique $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\,,\;\ldots\;,\;\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right)\,,$$

d'où

$$\langle\, f(x), x\,\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,,$$

et donc par inégalité triangulaire, et puisque $a_{ij} > 0$,

$$|\,\langle\, f(x), x\,\rangle\,| \;=\; \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\right| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_i x_j| \;=\; \langle\, f(\hat{x}), \hat{x}\,\rangle \;\leqslant\; \alpha\,||\hat{x}||^2 \;=\; \alpha\,||x||^2\,,$$

comme voulu.

2.(a) Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique que $\mathbb{R}^n$. On a, pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ dans cette base,

$$\boxed{\langle\, f(x), y\,\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y_i\,x_j}\,,$$

donc, par exemple,

$$0 \;<\; a_{11} \;=\; \langle\, f(e_1), e_1\,\rangle \underset{1.(a)}{\leqslant} \alpha\,||e_1||^2 \;=\; \alpha\,,$$

donc $\alpha > 0$.

2.(b) Soit λ une valeur propre de f et soit v un vecteur propre associé. On applique à v l'inégalité de la question 1.(c) :

$$|\lambda|\,||v||^2 \;=\; |\,\langle\, f(v), v\,\rangle\,| \;\leqslant\; \alpha\,||v||^2 \;.$$

Or v est un vecteur propre donc il n'est pas nul, d'où le résultat en simplifiant par $||v||^2$.

3. Reprenons la fin de la réponse à la question 1.(c), avec pour x un vecteur propre associé à α :

$$\alpha\,||x||^2 \;=\; |\,\langle\, f(x), x\,\rangle\,| \;\leqslant\; \langle\, f(\hat{x}), \hat{x}\,\rangle \;\leqslant\; \alpha\,||x||^2 \;,$$

et donc les inégalités sont des égalités :

$$\langle\, f(\hat{x}), \hat{x}\,\rangle \;=\; \alpha\,||x||^2 \;=\; \alpha\,||\hat{x}||^2 \;.$$

L'égalité est atteinte pour le vecteur $\hat{x}$ donc d'après la question 1.(b), il appartient à l'espace propre de f associé à α.

De plus $\hat{x}$ n'est pas nul sinon x le serait aussi, ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi, $\hat{x}$ est bien un vecteur propre de f pour la valeur propre α.
