Séance de révision n° 6

Équations différentielles linéaires

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E_k) \qquad xy'' + 2y' + kxy = 0\,.$$

1. (a) Déterminer k pour que la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ soit solution de (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$. On choisira, pour la première question, cette valeur de k.
   (b) Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ vérifie la même équation différentielle (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$, et la solution de (E_k) qui tend vers 1 quand $x \to 0^+$.
2. On prend k quelconque.
   (a) Effectuer dans (E_k) le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$.
   (b) En déduire toutes les solutions de (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$ (on distinguera trois cas de figure selon que $k = 0$, $k = \alpha^2 > 0$, $k = -\alpha^2 < 0$).
   (c) Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une solution ayant pour limite 1 quand $x \to 0^+$.
   (d) Montrer que cette solution admet un développement en série entière que l'on précisera.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(2-x)y' + (1-x)y = 1\,,$$

où la fonction inconnue y est une fonction réelle de la variable réelle.

1. Intégrer soigneusement (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 2[$ et $I_3 =]2, +\infty[$.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique solution φ_2 de (E) sur I_2 possédant une limite finie à droite en 0 et déterminer cette limite.
   Indication : on pourra poser $\forall\, x \in I_2$, $t = \arccos(1-x)$.
   (b) Montrer que φ_2' admet une limite finie à droite en 0, que l'on calculera.
3. Montrer de même qu'il existe une unique solution φ_1 de (E) sur I_1 admettant une limite finie à gauche en 0.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \varphi_1'(x)$.
4. En déduire qu'il existe une unique solution φ de (E) sur $]-\infty, 2[$.

Exercice 3

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$, où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que les réels 2 et 4 sont deux valeurs propres de u et déterminer une base des deux sous-espaces propres correspondants.

2. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que l'endomorphisme u admette relativement à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On choisira les coordonnées des vecteurs de cette nouvelle base parmi $1, 0, -1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n en fonction de n.
4. x, y, z désignant trois fonctions réelles de classe C^1, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 8x(t) - y(t) - 5z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + (1-x)y' - y = 0\,.$$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$, exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles et de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,.$$

2. Déterminer de même la solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$.
3. Déterminer enfin les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
