Corrigé de la séance de révision n° 6

Exercice 1

1.(a) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall\, x>0\,,\quad f(x)=\frac{e^x}{x}\quad ;\quad f'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\quad ;\quad f''(x)=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right),$$

donc f est solution de (E_k) si, et seulement si,

$$\forall\, x>0\,,\quad x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+kx\times\frac{1}{x}\;=\;0\iff 1+k=0\iff k=-1\,.$$

1.(b) ► *1re méthode* : on refait les calculs avec g, et on constate que g est également solution de E_{-1}.

► *2de méthode* : on remarque que $\forall\, x>0\,,\ g(x)=-f(-x)$ et que les calculs précédents sont valables sur $\mathbb{R}^*$, et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\begin{aligned}&\forall\, x<0\,,\quad xf''(x)+2f'(x)+kxf(x)=0\\ \Longrightarrow\;&\forall\, x>0\,,\quad -xf''(-x)+2f'(-x)-kxf(-x)=0\\ \Longrightarrow\;&\forall\, x>0\,,\quad xg''(x)+2g'(x)+kxg(x)=0\,,\end{aligned}$$

donc g est également solution de E_k pour $k=-1$.

1.(c) Puisque (E_k) est une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 2, résolue sur $\mathbb{R}_+^*$, le cours affirme que l'ensemble des solutions de (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Or f est g sont deux solutions de (E_k) linéairement indépendantes, donc l'ensemble des solutions de (E_k) est (pour $k=-1$),

$$\mathrm{Vect}(f,g)\;=\;\left\{x\longmapsto\lambda\,\frac{e^x}{x}+\mu\,\frac{e^{-x}}{x}\,,\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}\;=\;\left\{x\longmapsto\alpha\,\frac{\operatorname{ch}x}{x}+\beta\,\frac{\operatorname{sh}x}{x}\,,\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

En choisissant plutôt la seconde expression de la solution générale de (E_k), on voit que pour que $y=x\longmapsto\alpha\,\dfrac{\operatorname{ch}x}{x}+\beta\,\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$ tende vers 1 lorsque $x\to0^+$, il est nécessaire et suffisant que $\alpha=0$ et $\beta=1$, et donc la solution cherchée est $y=x\longmapsto\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$.

2.(a) En posant $z(x)=xy(x)$, on s'assure que z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque c'est le cas pour y, et on a alors

$$\forall\, x>0\,,\quad y(x)=\frac{z(x)}{x}\quad ;\quad y'(x)=\frac{z'(x)}{x}-\frac{z(x)}{x^2}\quad ;\quad y''(x)=\frac{z''(x)}{x}-2\,\frac{z'(x)}{x^2}+2\,\frac{z(x)}{x^3},$$

donc y est solution de (E_k) si, et seulement si,

$$\begin{aligned}&\forall\, x>0\,,\quad x\left(\frac{z''(x)}{x}-2\,\frac{z'(x)}{x^2}+2\,\frac{z(x)}{x^3}\right)+2\left(\frac{z'(x)}{x}-\frac{z(x)}{x^2}\right)+kx\times\frac{z(x)}{x}=0\\ \iff\;&\forall\, x>0\,,\quad z''(x)+kz(x)=0\,.\end{aligned}$$

2.(b) • Si $k=0$, l'équation différentielle vérifiée par z est $z''=0$, d'où $z(x)=a+bx$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ arbitraire, donc

$$\exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\,,\forall\, x>0\,,\quad y(x)=\frac{a}{x}+b\,.$$

• Si $k=\alpha^2>0$, la fonction z vérifie $z''+\alpha^2z=0$ donc $z(x)=a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ arbitraire, donc

$$\exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\,,\forall\, x>0\,,\quad y(x)=\frac{a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)}{x}\,.$$

- Enfin, si $k = -\alpha^2 < 0$, on a $z'' - \alpha^2 z = 0$ donc $z(x) = a\,\mathrm{ch}(\alpha x) + b\,\mathrm{sh}(\alpha x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ arbitraire, donc

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\,, \forall\,x > 0\,, \quad y(x) = \frac{a\,\mathrm{ch}(\alpha x) + b\,\mathrm{sh}(\alpha x)}{x}\,.$$

2.(c) Si $k = 0$, la solution constante égale à 1 convient, et sinon, en choisissant $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient respectivement les fonctions

$$x \longmapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(\alpha x)}{\alpha x}\,,$$

qui ont bien pour limite 1 en 0^+, d'après les équivalents (usuels) en 0 des fonctions sin et sh.

2.(d) Si $k = 0$, la fonction est déjà développée en série entière, et sinon, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n+1)!}\,x^{2n} \quad \text{et de même,} \quad \frac{\mathrm{sh}(\alpha x)}{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n+1)!}\,x^{2n}$$

Exercice 2

1. Notons I l'un des trois intervalles I_1, I_2 ou I_3. Sur I la fonction $x \mapsto x(2-x)$ ne s'annule pas donc (E) se met sous la forme résolue

$$(E) \quad \boxed{y' = \frac{x-1}{x(2-x)}\,y + \frac{1}{x(2-x)}}\,.$$

- Pour résoudre l'équation homogène (H) $y' = \dfrac{x-1}{x(2-x)}\,y$ on calcule

$$\int \frac{x-1}{x(2-x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\bigl|x(2-x)\bigr| + cst \quad (\text{type } \tfrac{u'}{u})$$

ce qu'on pouvait obtenir aussi par DES de la fraction rationnelle sous la forme $\dfrac{x-1}{x(2-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{2-x}$ et on trouve sans peine $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour chaque intervalle I_k ($k \in \{1,2,3\}$) il existe une constante réelle c_k telle que

$$\forall\,x \in I_k\,, \quad y(x) = c_k \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\bigl|x(2-x)\bigr|\right) = \boxed{\frac{c_k}{\sqrt{|x(2-x)|}}}\,.$$

Notons alors y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ par $y_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}$.

- Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ on a $y_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$ et on cherche une solution particulière de (E) sur I_1 sous la forme $y(x) = C(x)y_0(x)$ où C est une fonction de classe C^1 sur I_1. Alors y est solution de (E) sur I_1 si et seulement si $C'y_0 + Cy_0' - \dfrac{x-1}{x(2-x)}\,Cy_0 = \dfrac{1}{x(2-x)}$ ou encore, puisque y_0 est solution de l'équation homogène, si et seulement si

$$C'y_0 = \frac{1}{x(2-x)} \iff C' = \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x(2-x)} = \frac{-1}{\sqrt{x(x-2)}} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2-1}}\,.$$

Ainsi,

$$C(x) = \int \frac{-dx}{\sqrt{(1-x)^2-1}} \underset{\left[\substack{u=1-x\\ du=-dx}\right]}{=} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \underset{(u>1)}{=} \mathrm{argch}(u) + cst = \mathrm{argch}(1-x) + cst\,.$$

On peut choisir $C(x) = \mathrm{argch}(1-x)$ de sorte qu'une solution particulière de (E) sur I_1 est

$$y(x) = \frac{\mathrm{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}$$

et donc la solution générale de (E) sur I_1 est

$$\forall x \in I_1\,, \quad \boxed{y(x) = \frac{c_1 + \operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}} \quad (c_1 \in \mathbb{R})\,.$$

• Sur $I_2 =]0,2[$ on a $y_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ et les calculs valent jusqu'à $C' = \dfrac{\sqrt{x(2-x)}}{x(2-x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

Ainsi,

$$C(x) \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \underset{\left[\substack{u=x-1\\du=dx}\right]}{=} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \underset{(-1<u<1)}{=} \arcsin(u) + cst \;=\; \arcsin(x-1) + cst\,.$$

On en déduit de même la solution générale de (E) sur I_2 qui est

$$\forall x \in I_2\,, \quad \boxed{y(x) = \frac{c_2 + \arcsin(x-1)}{\sqrt{x(2-x)}}} \quad (c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

• Sur $I_3 =]2,+\infty[$ on a $y_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$ et on obtient $C' = \dfrac{\sqrt{x(x-2)}}{x(2-x)} = \dfrac{-1}{\sqrt{x(x-2)}} = \dfrac{-1}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$.

Ainsi,

$$C(x) \;=\; \int \frac{-dx}{\sqrt{(x-1)^2-1}} \underset{\left[\substack{u=x-1\\du=dx}\right]}{=} \int \frac{-du}{\sqrt{u^2-1}} \underset{(u>1)}{=} -\operatorname{argch}(u) + cst \;=\; -\operatorname{argch}(x-1) + cst\,.$$

Enfin, la solution générale de (E) sur I_3 est

$$\forall x \in I_3\,, \quad \boxed{y(x) = \frac{c_3 - \operatorname{argch}(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}} \quad (c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

On a utilisé la primitive $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{argch}(u) + cst & \text{si } u > 1 \\ -\operatorname{argch}(-u) + cst & \text{si } u < -1 \end{cases} = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + cst$ dans les deux cas.

2.(a) Soit y une solution de (E) sur I_2. Elle s'écrit donc $y(x) = \dfrac{c_2 + \arcsin(x-1)}{\sqrt{x(2-x)}}$ avec $c_2 \in \mathbb{R}$. Pour que cette solution possède une limite finie en 0^+, il est nécessaire, puisque son dénominateur tend vers 0, que son numérateur tende lui aussi vers 0, or celui-ci tend vers $c_2 + \arcsin(-1) = c_2 - \dfrac{\pi}{2}$ et donc on doit avoir $c_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, si φ_2 existe c'est nécessairement

$$\varphi_2(x) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(x-1)}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}} = \boxed{\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}}}.$$

Montrons que cette fonction convient, c'est-à-dire qu'elle possède bien une limite finie en 0^+ et pour cela suivons l'indication de l'énoncé en posant $t = \arccos(1-x) \in]0,\pi[$. On a $t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$, et

$$\varphi_2(x) = \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = \frac{t}{|\sin t|} = \frac{t}{\sin t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1\,.$$

On a bien $\varphi_2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

2.(b) En notant $t = t(x) = \arccos(1-x)$ on a $t' \underset{\text{not}}{=} t'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \dfrac{1}{\sin t}$ et donc, en dérivant la relation $\varphi_2(x) = \dfrac{t(x)}{\sin t(x)}$ par rapport à x on obtient

$$\varphi_2'(x) \;=\; \frac{t'\sin t - tt'\cos t}{\sin^2 t} \;=\; \frac{1 - t\,\frac{\cos t}{\sin t}}{\sin^2 t} \;=\; \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^3 t} \underset{0}{=} \frac{t - \frac{t^3}{6} - t(1 - \frac{t^2}{2}) + \circ(t^3)}{\sin^3 t} \;=\; \frac{\frac{t^3}{3} + \circ(t^3)}{\sin^3 t}\,,$$

et donc $\varphi_2'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1}{3}$.

3. Cherchons une solution $y(x) = \dfrac{c_1 + \operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}$ de (E) sur I_1 ayant une limite finie en 0^-. Pour cela il est nécessaire que le numérateur tende vers 0, or celui-ci tend vers $c_1 + \operatorname{argch}(1) = c_1$ et donc on doit avoir $c_1 = 0$.

Notons $\varphi_1(x) = \boxed{\dfrac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}}$ pour tout $x < 0$ et montrons qu'elle possède bien une limite finie à droite en 0.

Posons cette fois $t = t(x) = \operatorname{argch}(1-x) > 0$ de sorte que $t \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$, et que

$$\varphi_1(x) = \frac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{(x-1)^2-1}} = \frac{t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \frac{t}{\operatorname{sh} t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1\,.$$

Montrons ensuite que φ_1' possède également une limite finie en 0^-. On a $t' = t'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)^2-1}} = \dfrac{-1}{\operatorname{sh} t}$ et donc

$$\varphi_1'(x) = \frac{t'\operatorname{sh} t - tt'\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} = \frac{-\operatorname{sh} t + t\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t} \underset{0}{=} \frac{-t - \frac{t^3}{6} + t(1+\frac{t^2}{2}) + \circ(t^3)}{\operatorname{sh}^3 t} = \frac{\frac{t^3}{3} + \circ(t^3)}{\operatorname{sh}^3 t}$$

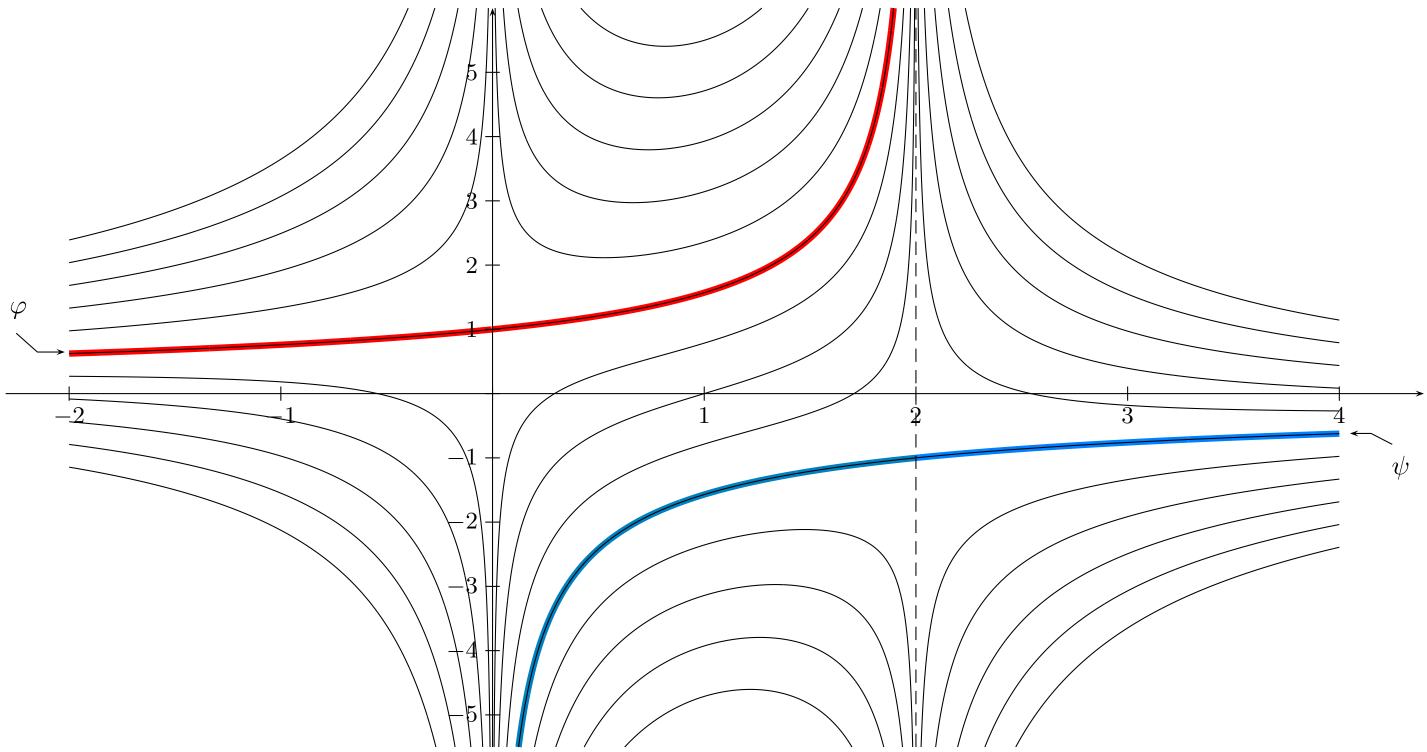
et ainsi $\varphi_1'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \dfrac{1}{3}$.

4. Soit φ une solution de (E) sur $]-\infty, 2[$. Alors $\varphi_{|I_1}$ (resp. $\varphi_{|I_2}$) est solution de (E) sur I_1 (resp. I_2) et φ est continue en 0, donc elle possède une limite finie à gauche (resp. à droite) en 0, et donc on doit avoir $\varphi_{|I_1} = \varphi_1$ et $\varphi_{|I_2} = \varphi_2$ ainsi que $\varphi(0) = 1$ par continuité. Ainsi φ est déterminée de manière unique sur $]-\infty, 2[$ par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}} & \text{si } 0 < x < 2\,, \\ \varphi(0) = 1\,, & \\ \varphi(x) = \dfrac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien solution de (E) sur $]-\infty, 2[$. Or on a $\varphi(0^-) = \varphi(0) = \varphi(0^+) = 1$ donc φ est continue en 0 et $\varphi'(0^-) = \dfrac{1}{3} = \varphi'(0^+)$ et donc, d'après le théorème « limite-dérivée » φ est de classe C^1 sur $]-\infty, 2[$ avec $\varphi'(0) = \dfrac{1}{3}$. De plus φ vérifie l'équation différentielle (E) sur I_1 et sur I_2, ainsi qu'en 0 à l'évidence. C'est donc l'unique solution de (E) sur $]-\infty, 2[$.

Remarque : on démontre de manière analogue que (E) possède une unique solution ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, obtenue par recollement avec les constantes $c_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $c_3 = 0$. On a le schéma des courbes intégrales (repère non orthonormé) :



Exercice 3

1. Considérons les deux matrices

$$B = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes B_1, B_2, B_3 de B vérifient $B_1 + B_2 + B_3 = 0$ et les colonnes C_1, C_2, C_3 de C vérifient $C_1 - C_2 + C_3 = 0$ donc les matrices B et C ne sont pas inversibles, ce qui montre que 2 et 4 sont des valeurs propres de A.

Les matrices B et C sont de rang au plus 2 car elles ne sont pas inversibles, et au moins 2 car leurs deux premières colonnes sont indépendantes. Elles sont donc de rang 2, donc les espaces propres $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ sont de dimension 1.

Puisqu'on a déjà trouvé un vecteur propre pour chacun de ses espaces propres, on a

$$\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche une base $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $AV_1 = 4V_1$; $AV_2 = 4V_2 + 3V_1$ et $AV_3 = 2V_3$.

Nécessairement, V_1 et V_3 sont des vecteurs propres de A pour les valeurs propres respectives 4 et 2, on choisit donc

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors V_2 sous forme indéterminée $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et la relation imposée s'écrit

$$AV_2 = 4V_2 + 3V_1 \iff CV_2 = 3V_1 \iff \begin{cases} 4x - y - 5z = 3 \\ -2x - y + z = -3 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - y = 3 + 5z \\ 2x + y = 3 + z \end{cases}$$

et le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ répond à ce système.

La famille $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ puisque la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $2 \neq 0$.

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est bien

$$\big[\,u\,\big]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times \big[\,u\,\big]_{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = T.$$

3. On a $A = PTP^{-1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$, et les puissances de T se calculent facilement, par exemple en devinant la formule et en la démontrant par récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad A^n = P \times \begin{pmatrix} 4^n & 3n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

4. Le système s'écrit sous forme matricielle

$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP{-}1X \iff Y' = TY\,,$$

où on a posé $Y' = P^{-1}X$. Le nouveau système est triangulaire et si on pose $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, il s'écrit

$$\begin{cases} u' = 4u + 3v \\ v' = 4v \\ w' = 2w \end{cases} \iff \exists (b,c) \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} u' = 4u + 3be^{4t} \\ v = be^{4t} \\ w = ce^{2t} \end{cases}$$

Il reste à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants $u' = 4u + 3be^{4t}$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit $u = ae^{4t}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et une solution particulière est donnée par $u = bte^{4t}$, donc la solution générale de cette équation est $u = (a + bt)e^{4t}$.

Ainsi,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (a+bt)e^{4t} \\ be^{4t} \\ ce^{2t} \end{pmatrix} \;;\; X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+bt)e^{4t} \\ be^{4t} \\ ce^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = (a+b+bt)e^{4t} + ce^{2t} \\ y(t) = (b-a-bt)e^{4t} + ce^{2t} \\ z(t) = (a+bt)e^{4t} + ce^{2t} \end{cases} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 .$$

Exercice 4

1. Il faut, pour démarrer la résolution, déterminer une solution de l'équation homogène (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or on remarque que la famille des coefficients (c'est-à-dire les trois fonctions $x \mapsto x\,;\; x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto -1$) est liée, on cherche donc une solution du type $y = e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$, et manifestement $y = e^x$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On applique ensuite la méthode de Lagrange : on cherche la solution générale de (E) sous la forme $y(x) = z(x)\,e^x$, où z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = ze^x \quad ; \quad y' = (z+z')e^x \quad ; \quad y'' = (z + 2z' + z'')e^x ,$$

donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x(z+2z'+z'') + (1-x)(z+z') - z = 0 \iff xz'' + (1+x)z' = 0 \iff \boxed{z'' = -\left(1 + \frac{1}{x}\right) z'} .$$

On a obtenu une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en z', et résolue sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'intègre en

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) \;=\; \alpha\, e^{-(x+\ln x)} \;=\; \alpha\, \frac{e^{-x}}{x} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) .$$

On choisit, comme primitive de $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ proposée par l'énoncé, d'où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) \;=\; \alpha \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \beta \quad \text{et} \quad y(x) = \alpha\, e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;+\; \beta e^x \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 .$$

2. On reprend l'étude précédente : rien ne change jusqu'à $z'(x) = \gamma\, e^{-(x+\ln(-x))} \;=\; -\gamma\, \dfrac{e^{-x}}{x}$, et on peut aussi bien noter $z'(x) = \gamma\, \dfrac{e^{-x}}{x}$, puisque γ est un réel arbitraire.

Ensuite, on choisit comme primitive sur $\mathbb{R}_-^*$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, ce qui donne

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = \gamma\, e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;+\; \delta e^x \quad (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 .$$

3. On étudie le raccordement des solutions en 0.

Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors la restriction de y à $\mathbb{R}_+^*$ (resp. à $\mathbb{R}_-^*$) est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. à $\mathbb{R}_-^*$), donc

$$\exists\, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 , \quad \forall\, x > 0\,,\; y(x) = \alpha\, e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;+\; \beta e^x \quad \text{et} \quad \forall\, x < 0\,,\; y(x) = \gamma\, e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;+\; \delta e^x .$$

De plus y est continue en 0, donc elle possède une limite finie à droite en 0, ce qui impose $\alpha = 0$ car l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est divergente. En effet, on a l'équivalent $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et s'agissant de fonctions positives, l'intégrale a la même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ qui diverge (critère de Riemann ou directement).

Pour la même raison, c'est-à-dire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, l'existence d'une limite finie de y à gauche en 0 impose $\gamma = 0$.

Les limites à gauche et à droite de y en 0 doivent être égales, donc $\beta = \delta$, et finalement, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \beta\, e^x .$$

Réciproquement, cette fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, comme on l'a remarqué à la première question.

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc $\{x \longmapsto \beta\, e^x \;,\; \beta \in \mathbb{R}\}$.
