– Devoir Maison n°7 –

Soit $E = \mathbb{R}^2$ l'espace affine euclidien orienté de dimension 2 rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On définit la courbe C par la représentation paramétrique suivante :

$$t \mapsto \big(t - th(t)\big)\,\vec{i} + \frac{1}{ch(t)}\,\vec{j}\,.$$

On rappelle que l'on a :

$$sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \ \text{ et } \ th(t) = \frac{sh(t)}{ch(t)}.$$

1. Faire l'étude de la courbe C (domaine de définition, symétries, sens de variations, branches infinies), préciser la tangente au point $t = 0$ et la construire dans E.

2. Donner une équation de la droite Δ_t tangente à C au point M de paramètre t.

3. Soit $A(t)$ le point d'intersection de Δ_t et de la droite $y = 0$. Montrer que la longueur $M(t)A(t)$ est constante.

4. On définit la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t) = t - 2th(t)$, pour tout réel t. Tracer le graphe de φ.
Remarque : lors de l'étude de φ, on montrera que la dérivée φ' s'annule sur $[0, +\infty[$ en un point de paramètre t_0 tel que $ch(t_0) = \sqrt{2}$ et on prendra pour valeur approchée de $t_0 \approx 0,88$ et pour $\varphi(t_0) \approx -0,53$.

5. On considère la famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ de courbes d'équations : $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 1 - \alpha^2$.

- **a.** Préciser la nature de ces courbes.
- **b.** Déduire de la question précédente qu'il existe un unique réel α_0 tel que, si $|\alpha| > \alpha_0$, alors l'intersection de C avec Γ_α se réduit à deux points.
- **c.** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que les tangentes à C et à Γ_α en l'un des points d'intersection sont orthogonales.