Devoir Maison n°6
Correction

Partie 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ **continue et bornée**. Pour tout réel $s > 0$, on pose :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^x = \frac{1}{s}.$

b. f est bornée : soit $M > 0$ tel que $\forall t, |f(t)| \leq M$. Alors $t \mapsto \dfrac{t}{e^{-st}f(t)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et bornée par $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-st}$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

2. $\displaystyle F(s) = \int_a^b ue^{-st}\,dt = \left[-\frac{u}{s}e^{-st}\right]_a^b = \frac{u}{s}(e^{-as} - e^{-bs}).$

3. a. On écrit directement :

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1} e^{-st}f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}(-1)^n u_n e^{-st}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n u_n}{s}(e^{-ns} - e^{-(n+1)s}) = \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n u_n e^{-ns}.\end{aligned}$$

b. Comme $|(-1)^n u_n e^{-ns}| \leq e^{-ns} = (e^{-s})^n = q^n$ où $0 < q < 1$, et comme $\left(\sum q^n\right)$ est alors convergente, on en déduit que $\left(\sum(-1)^n u_n e^{-ns}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

c. On a vu que $F(s)$ existe (puisque f est bornée par 1 dans cette question), et donc :

$$F(s) = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n e^{-ns} = \sum_{n=0}^{+\infty}U_n(s),$$

où on a posé $U_n(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s}(-1)^n u_n e^{-ns}$.

Partie 2

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Les racines sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ avec $x_1 < x_2$.

2. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, donc les théorèmes usuels montrent que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

3. Pour u et v de classe C^n, on a :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n}uv^{(n)}.$$

4. On applique la formule de Leibniz à l'ordre n au produit $(x^2 + x - 1)f(x)$ et comme les dérivées d'ordre 3 ou plus du polynôme sont toutes nulles, on obtient directement la formule de l'énoncé.

5. a. $a_0 = f(0) = -1$ et $a_1 = f'(0) = -1$.

b. La relation obtenue au II.4, appliquée en $x = 0$, fournit, pour $p \geq 2$:

$$-p!a_p + p.(p-1)!a_{p-1} + p(p-1).(p-2)!a_{p-2} = 0,$$

ce qui se simplifie par $p!$ et donne :

$$a_p = a_{p-1} + a_{p-2}.$$

c. On reconnait une suite de Fibonacci.
L'équation caractéristique est $x^2 = x + 1$, dont les racines sont $\dfrac{1}{x_1}$ et $\dfrac{1}{x_2}$.
On sait qu'il existe alors deux constantes a et b telles que, pour tout entier naturel p, on ait :

$$a_p = \frac{a}{x_1^p} + \frac{b}{x_2^p}.$$

Les conditions $a_0 = a_1 = -1$ conduisent alors à $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $b = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} x_1^{-p} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} x_2^{-p}.$$

6. La formule de Taylor-Young annonce que si f est de classe C^n sur un intervalle ouvert I contenant un réel a, alors, au voisinage de a, on dispose de :

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

On l'applique ici en $a = 0$ et on trouve le développement limité demandé :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

7. a. On trouve facilement $\dfrac{1}{x^2+x-1} = \dfrac{1}{x_1 - x_2}\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$, ce qui revient à dire que $a = -b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

b. On a $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x-x_1}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-x_1)^{n+1}}$, ce qu'établit facilement une récurrence sur n.

c. On en déduit que :

$$a_p = \frac{1}{p!}(-\frac{1}{\sqrt{5}})\left(\frac{(-1)^p p!}{(-x_1)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p}{(-x_2)^{p+1}}\right) = \frac{1}{x_1\sqrt{5}} x_1^{-p} - \frac{1}{x_2\sqrt{5}} x_2^{-p},$$

ce qui est la même réponse qu'en II.5.c puisque $\dfrac{1}{x_1\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\dfrac{1}{x_2\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Partie 3

1. a. La série entière $\sum nx^n$ est de rayon de convergence égal à 1, de même que la série entière $\sum x^n$.
On peut donc dériver/intégrer terme à terme sur l'intervalle $]-1,1[$, et ainsi, posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

on obtient :

$$T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

b. Si $y > 1$, on a $x = \dfrac{1}{y} \in]0, 1[$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{(1-\frac{1}{y})^2} = \frac{1}{y - 2 + \frac{1}{y}}.$$

2. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_0 = 0, w_1 = 1, \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 2,\ w_n = w_{n-1} + w_{n-2}.$$

a. Là encore, on a une suite de Fibonacci, mais cette fois les conditions initiales ont changé.
On sait qu'il existe deux constantes a' et b' telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{a'}{x_1^n} + \frac{b'}{x_2^n}.$$

Comme $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$, on trouve $a' = -b' = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, ce qui donne :

$$w_n = -\frac{x_1^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{x_2^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

On a $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1$ donc $|w_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}x_2^n}$ et, pour $x \neq 0$, $\left|\dfrac{w_{n+1}x^{n+1}}{w_n x^n}\right| \sim \dfrac{1}{x_2}|x|$.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$ est, d'après la règle de d'Alembert, égal à $R = x_2$.

b. On travaille ici avec $x \in]-x_2, x_2[$.
Si on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, alors on a :

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1}x^n \quad \text{ et } \quad x^2 S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2}x^n,$$

ce qui nous donne :

$$(1 - x - x^2)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(w_n - w_{n-1} - w_{n-2})x^n + (w_1 - w_0)x + w_0 = 0 + x + 0 = x.$$

c. Soit maintenant $y > \dfrac{1}{x_2}$, de sorte que $x = \dfrac{1}{y} \in]0, x_2[$, ce qui permet de lui appliquer le résultat précédent et d'obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{y - 1 - \frac{1}{y}}.$$