

– Devoir Maison n°5 –

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.
 - a. En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
 - b. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit $E_\lambda(f \circ g)$ (resp. $E_\lambda(g \circ f)$) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ . Démontrer les inclusions

$$g(E_\lambda(f \circ g)) \subset E_\lambda(g \circ f) \text{ et } f(E_\lambda(g \circ f)) \subset E_\lambda(f \circ g).$$

- c. Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces $E_\lambda(f \circ g)$ et $E_\lambda(g \circ f)$?
 - d. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.
 - a. Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.
 - b. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?

- c. Dédurre de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
 - d. Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On définit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On considère H l'hyperplan de E suivant : $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base de H .
3. Déterminer une base orthonormale de H .
4. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .