Devoir Maison n°4
Correction

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{\ n} n!}.$$

1. On a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!}\frac{e^n\sqrt{n+1}}{e^{n+1}\sqrt{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e^1}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} e^{-1} = e^{(n+1/2)\ln(1+\frac{1}{n})}e^{-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$

2. On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}.\end{aligned}$$

On en déduit de cet équivalent que, pour n assez grand, $v_n > 0$; donc la série $\sum v_n$ converge, par comparaison aux séries de Riemann .

3. Puisque $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$, la somme partielle d'ordre N de la série $\sum v_n$ s'écrit :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} (\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \ln u_{N+1} - \ln u_1 = \ln u_{N+1}.$$

Comme $\sum v_n$ converge, alors, par définition, la suite de ses sommes partielles $(S_N)_N$ converge vers un réel λ. Par conséquent :

$$\lim u_N = \lim u_{N+1} = e^{\lambda} = \ell > 0.$$

Ainsi, $u_n \Leftrightarrow \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$ et par suite : $n! \sim n^n e^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\ell}$.

Exercice 2

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$; elle est positive sur $[1,+\infty[$ et négative sur $[0,1[$.
Nous sommes donc dans une situation où l'on peut utiliser les théorèmes de comparaison au voisinage de 0 et de $+\infty$.

- Étude au voisinage de 0
  On a $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \sim_0 \ln t$. Par suite, $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge par comparaison à l'intégrale de référence $\int_0^1 \ln t\,dt$.
- Étude au voisinage de $+\infty$
  On a $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \sim_{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}$. En utilisant l'étude des *intégrales de Bertrand* (ce résultat serait à démontrer, car hors-programme), on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge par comparaison.

- En conclusion, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

2. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[y,x] \subset]0,+\infty[$.
On choisit :

$$\left|\begin{array}{lll} u'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} & \leftarrow & u(t) = -\dfrac{1}{1+t} \\ v(t) = \ln t & \rightarrow & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

avec u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_y^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt &= \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_y^x + \int_y^x \frac{1}{t(t+1)}\,dt \\
&= \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_y^x + \int_y^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \\
&= \left[-\ln(1+t) + \frac{t\ln t}{1+t}\right]_y^x.
\end{aligned}$$

Notons $F(t) = -\ln(1+t) + \dfrac{t\ln t}{1+t}$.

En faisant tendre y vers 0^+, on trouve : $F(y) \longrightarrow 0$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient une forme indéterminée, or $\ln(1+x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \ln(x)$, donc on obtient :

$$F(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{1+x} \Rightarrow F(x) \longrightarrow 0.$$

On déduit en $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

3. La fonction $\varphi : t \mapsto u = \dfrac{1}{u}$ est un changement de variable bijectif strictement décroissant de classe $\mathcal{C}^1$ de $I =]0,+\infty[$ sur lui-même.
Si on pose $t = \dfrac{1}{u}$, alors on a $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$, puis comme A est convergente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\dfrac{1}{u}\right)}{1+\dfrac{1}{u^2}}\,\frac{1}{u^2}\,du,$$

qui après simplification, s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u)^2}\,du,$$

c'est-à-dire $A = -A$ et donc $A = 0$.