– Devoir Maison n°3 –

Soient les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit $I = E_1 + E_4$ et $J = E_2 + E_3$.

On considère l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, associe la matrice $f(M) = \dfrac{a+d}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J$.

1. Montrer que $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer $f(K)$, pour $K = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Calculer $f(E_i)$, en fonction des éléments de B, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

5. En déduire $A = M_B(f)$.

6. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

7. Montrer que : $M \in Vect(I, J) \Rightarrow f(M) = M$.

8. On note $\mathrm{Inv}(f) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ M = f(M)\}$. Montrer que $\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

9. Montrer que $\{0, 1\} \subset Sp(f)$.

10. Montrer que $B' = (E_1 - E_4, E_2 - E_3, I, J)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

11. En déduire, sans calculer de déterminant, le spectre de f.

12. Déterminer $A' = M_{B'}(f)$.

13. Déterminer les coordonnées a', b', c', d' de la matrice K dans la base B'.