– Devoir Maison n°12 –

Exo 1 (Probabilités)

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $\frac{1}{4}$.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

a. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

b. Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.

a. Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.

b. En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".

c. Déterminer la loi de Z.

3. On considère la succession d'appels reçus par le standard lors d'une année. On note U le premier appel reçu en retard.
Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exo 2 (Intégrales dépendant d'un paramètre)

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.

2. Prouver que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt,$$

où $\psi(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.

5. En déduire la valeur de C.

T.S.V.P.

Exo 3 (Fonctions à plusieurs variables)

1. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, en posant $x = u$ et $y = uv$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.

c. Vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.