Devoir Maison n°12
Correction

Exo 1 (Probabilités)

1. a. Soit R l'événement "le client a subi un retard". X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante $\frac{1}{4}$ au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{4}\right)$.
En particulier, on a :

$$E(X) = 1 \text{ et } Var(X) = \frac{3}{4}.$$

b. Il s'agit de la probabilité $P(X \geq 1)$, que l'on calcule par :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. a. On note $p = \frac{1}{4}$ et $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. On reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale. On a donc :

$$P(Z = k | Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

b. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} P(Z = k, Y = n) &= P(Y = n) P(Z = k | Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-m} \frac{m^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

c. Il faut réaliser la sommation sur n pour obtenir la loi marginale de Z. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(Z = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = k, Y = n) &= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-m} \frac{m^n}{k!(n-k)!} p^k \frac{q^n}{q^k} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k e^{mq} \\ &= e^{-mp} \frac{(mp)^k}{k!}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $mp = \frac{m}{4}$.

3. Comme U est le rang de la première réalisation de l'événément R de probabilité $p = \frac{1}{4}$ au cours d'une succession d'appels indépendants, alors Y suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$, c'est-à-dire que, pour $k \geq 1$, on a :

$$P(U = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

On applique alors la formule de l'espérance d'une variable aléatoire géométrique et on obtient :

$$E(U) = \frac{1}{p} = 4.$$

Exo 2 (Intégrales dépendant d'un paramètre)

1. Définissons sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$:

$$f(x,t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$$

qui est une fonction continue.
Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, on a :

$$f(x,t) \to (b-a)$$

lorsque t tend vers 0 (faire un DL par exemple). Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité en 0.
De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$t^2 f(x,t) \to 0 \implies f(t,x) =_{+\infty} o(1/t^2).$$

Ainsi, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $F(x)$ est bien définie.

2. La fonction f est de classe C^1, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-bt} - e^{-at}$$

et cette dernière fonction, qui ne dépend plus de x, est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, F est C^1 et :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt)dt.$$

Or, il est facile de voir que, pour tout $c > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct}\sin(xt)dt = \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t}dt\right) = \frac{x}{c^2+x^2}.$$

On en déduit que :

$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}.$$

3. Il suffit d'intégrer la relation précédente.

4. La relation demandée est une simple intégration par parties (généralisée), justifiée par la convergence de toutes les intégrales en jeu.

5. Faisons tendre x vers $+\infty$. On a d'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = C,$$

et d'autre part, de :

$$|F(x)| \leq \frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty} |\psi'(t)|dt,$$

on tire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. On en déduit que $C = 0$.

Exo 3 (Fonctions à plusieurs variables)

1. On pose $f(x,y) = g(u,v)$, donc $g = f \circ \varphi$, avec :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (x=u, y=uv) \end{array} \right. .$$

Remarquons tout d'abord que φ est une bijection de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même puisque :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ \\ y = uv \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ \\ v = \dfrac{y}{x} \end{array} \right. ,$$

ce qui nous donne :

$$\varphi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left(u=x, v=\dfrac{y}{x}\right) \end{array} \right. .$$

On montre ensuite que φ est un C^1-difféomorphisme sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ puisque :

$$|J_\varphi(x,y)| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ v & u \end{array} \right| = u \neq 0$$

et donc que le changement de variables proposé est bien admissible.
On a ensuite :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

On trouve alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et, puisque f est de classe C^2 et en vertu du théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}\right) + 2xy\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \\ & \qquad + y^2\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

Les solutions de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$ sont les fonctions de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de la forme :

$$g(u,v) = uK(v) + L(v)$$

où K et L sont des applications quelconques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

On en déduit alors que les solutions de $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sont donc les fonctions de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x,y) = xK(xy) + L(xy)$$

où K et L sont des applications quelconques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2. a. • La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) donc, si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

• Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6xy-15=0 \\ 3x^2-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

donc f admet deux points critiques : $a=\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ et $b=\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$.

• La fonction f est également de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x+6y=r \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0=t \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6x=s$$

– En a, on trouve $r=\dfrac{27}{2}$, $s=12$ et $t=0$, ce qui nous donne :

$$H_a=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix} \frac{27}{2} & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de h_a sont les solutions de $\left(X-\dfrac{27}{2}\right)X-144=0$, donc elles sont de signes contraires puisque leur produit vaut -144.
On en déduit que la fonction f n'admet pas d'extremum local au point a.

– On montre, de la même manière, que f n'admet pas non plus d'extremum local au point b.

• Conclusion : f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

b. • La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) donc, si g admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors (x_0, y_0) est un point critique de g.

• Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y)+4x^3=0 \\ 4(x-y)+4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=0 \\ -4(x-y)+4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^3-2x=0 \end{cases}$$

donc g admet trois points critiques : $0=(0,0)$, $a=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ et $b=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

• La fonction g est également de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et les dérivées partielles secondes de g sont :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=4(3x^2-1)=r \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=4(3y^2-1)=t \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=4=s$$

– En a, on trouve $r=20$, $s=4$ et $t=20$, ce qui nous donne :

$$H_a=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le 2}=4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de h_a sont les solutions de :

$$(X-5)^2-1=(X-5-1)(X-5+1)=(X-6)(X-4)=0,$$

donc elles sont strictement positives toutes les deux.
On en déduit que la fonction f admet un minimum local au point a, qui vaut $g(a)=8$.

– Pour tout couple, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on remarque que $g(-x,-y)=g(x,y)$ et on en conclut que g admet aussi un minimum local, égal à 8, au point b.

– $g(0,0)=0$ et, pour $x\neq 0$, $g(x,x)=2x^4>0$, donc g prend des valeurs strictement supérieures à $g(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$.
Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $g(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$, donc g prend des valeurs strictement inférieures à $g(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$.
Conclusion : g n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3. On considère la droite $D = \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ et son complémentaire $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash D$.

a. • La fonction f est continue sur Ω d'après les théorèmes généraux.

• Pour $(x_0, y_0) \in D$, on a $y_0 = 0$, donc :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant y^2 \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc f est également continue sur D.

• Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. • La fonction f est de classe C^1 sur Ω, d'après les théorèmes généraux et, pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, pour x_0 réel donné :

$$\frac{f(x_0+t,0) - f(x_0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et vaut 0.

Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \begin{cases} y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

• Etudions maintenant l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$, pour x_0 réel donné :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{x_0}{t}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} t \sin\left(\frac{x_0}{t}\right) = 0,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et vaut 0.

Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \begin{cases} 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, pour x_0 réel donné :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| \leqslant |y| \underset{(x,y)\to(x_0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(x_0,0)$ et finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur R^2.

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, pour x_0 réel donné :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\right| = \begin{cases} \left|2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right| & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}.$$

∗ Si $x_0 = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| = 0,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

$*$ Si $x_0 \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left| 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| = 0,$$

mais :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left| x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right|,$$

n'existe pas, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0, 0)$.

- Conclusion : le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1 est $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

c. • Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0,$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

- Etudions maintenant l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
  Pour $t \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \frac{t \cos\left(\frac{0}{t}\right)}{t} = 1,$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

- Remarque : on en déduit, d'aprés le théorème de Schwarz, que f n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$.