– Devoir Maison n°11 –

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère la courbe (C) de représentation paramétrique :

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

On considère les deux propriétés suivantes :

(P1) : La droite rencontre l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ et elle est parallèle plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(P2) : La droite coupe la courbe (C).

1. On considère les deux droites suivantes :

$$(D1) : \begin{cases} x(\alpha) = \alpha \\ y(\alpha) = \alpha \\ z(\alpha) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} , \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (D2) : \begin{cases} x(\alpha) = \alpha \\ y(\alpha) = -\alpha \\ z(\alpha) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} , \alpha \in \mathbb{R}.$$

a. Dire si les droites $(D1)$ et $(D2)$ vérifient les propriétés $(P1)$ et $(P2)$.

b. Donner une représentation paramétrique d'une droite qui vérifie les propriétés $(P1)$ et $(P2)$.

2. Soit (S) la surface engendrée par les droites qui vérifient les propriétés $(P1)$ et $(P2)$, c'est-à-dire les droites qui rencontrent l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ et la courbe (C) et sont parallèles au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

a. Vérifier que (S) admet pour représentation paramétrique :

$$(S) : \begin{cases} x(u,v) = v\cos u \\ y(u,v) = v\sin u \\ z(u,v) = u \end{cases} , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Déterminer les points réguliers de (S).

3. a. Vérifier que $A_1\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ est un point régulier de (S).

b. Donner une représentation paramétrique de la génératrice de (S) passant par le point A_1.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) au point A_1.

d. Donner un deuxième point ayant une de ses coordonnées nulle sur cette génératrice, puis déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) en ce point. Que remarque-t-on ?

4. Soit M un point de (C).

a. Vérifier que $M \in (S)$ et qu'il est birégulier.

b. On appelle plan osculateur en M à (C) le plan tangent dirigé par les deux premières dérivées de f.
Donner une équation cartésienne du plan osculateur, puis montrer que ce plan osculateur est égal au plan tangent à (S) en M.