– Devoir Maison n°10 –

Exercice 1

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a \quad ... \quad (E)$$

où a est une constante réelle.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

Après avoir justifier l'utilisation du théorème de composition, montrer que g vérifie une équation simple (E') que l'on déterminera.

2. Intégrer l'équation (E') pour en déduire l'expression de f.

3. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left|\begin{array}{lll} (x,y) & \mapsto & xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}\right.$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2).$$