

Devoir Maison n°10

Correction

Exercice 1

1. On pose $g(x, y) = f(u, v)$, donc $g = f \circ \varphi$, avec :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \\ (u, v) & \mapsto \left(x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2} \right) \end{cases}.$$

Remarquons alors que φ est un C^1 -difféomorphisme puisque $|J_\varphi(x, y)| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$ et donc que le changement de variables proposé est bien admissible.

Par composition, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

2. On intègre cette équation. Pour tout v , il existe une constante $h(v)$ telle que :

$$f(u, v) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Puisque la fonction $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est de classe C^1 , il en est de même de $v \mapsto h(v)$.

3. La fonction g est solution de l'équation si, et seulement, il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout u, v , on ait :

$$g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{au}{2} + h(v).$$

Pour revenir à x et y , il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{v-u}{2}$, on a donc :

$$g(x, y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y).$$

Exercice 2

1. D'une part, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En utilisant par exemple l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on obtient :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

2. Remarquons d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.

Par ailleurs, si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y - y^5 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'autre part, on a $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| &\leq \frac{|x|^4|y| + |y|^5 + 4|x|^2|y|^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq \frac{6(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 6(x^2 + y^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Par symétrie des rôles joués par x et y dans l'expression de $f(x, y)$, le même résultat est vrai pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On a donc prouvé que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1. Les dérivées partielles de f sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 12x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 12y.$$

Ces dérivées partielles ne s'annulent simultanément qu'en $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -4)$ et $(4, -4)$ qui sont les points critiques de f .

2. On a $f(t, 0) \sim -6t^2 < f(0)$ pour $t \neq 0$, et $f(0, t) \sim 6t^2 > f(0)$ pour $t \neq 0$: f ne peut pas présenter d'extrémum local en $(0, 0)$.
3. Il est plus facile d'écrire la formule de Taylor avec les nouvelles coordonnées $x = 4 + X$, $y = Y$. D'autre part, le calcul des dérivées partielles secondes donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 12.$$

La formule de Taylor est donc :

$$f(4 + X, Y) = -32 + 6X^2 + 6Y^2 + \|(X, Y)\|^2 \varepsilon(\|(X, Y)\|).$$

Maintenant, la quantité $6X^2 + 6Y^2$ est toujours positive, ce qui prouve que f admet un minimum local en $(4, 0)$.

4. De même, on démontre qu'en $(0, -4)$, la fonction f présente un maximum local, mais qu'en $(4, -4)$, elle n'a pas d'extremum local.