– Devoir Maison n°1 –

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. a. Donner la définition de $\mathrm{Im} f$.

b. Démontrer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.

2. a. Citer le théorème du rang.

b. Montrer que : $(E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f) \Longrightarrow \big(\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f\big)$.

Exercice 2

Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère la famille de vecteurs (u_1, u_2) donnés par :

$$u_1 = (1, 1, 0, 1) \text{ et } u_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Posons $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + t = 0, y + z = 0\}$.

1. Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels F et G.

2. a. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

b. Décomposer le vecteur $w = e_1 + 2e_3 + e_4$ dans la somme directe $E = F \oplus G$.

3. a. On considère une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\varepsilon_1 = u_1,\ \varepsilon_2 = u_2,\ \varepsilon_3 = (1, 1, -1, 0) \text{ et } \varepsilon_4 = (1, -1, 1, -2).$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. Calculer $f(w)$; ce résultat était-il prévisible ?