Devoir Maison n°1
Correction

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. a. $\text{Im}f = f(E) = \{y \in F \ / \ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

b. Soit $y \in \text{Im}f^2$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f\left(f(x)\right)$, ainsi $y = f(a)$ avec $a = f(x)$, on vient de prouver que $y \in \text{Im}f$, d'où : $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f$.

2. a. Le théorème du rang : si f est linéaire, alors $\dim E = \dim(Imf) + \dim(Kerf) = rg(f) + \dim(Kerf)$.

b. Supposons $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.
Comme $Imf^2 \subset Imf$, il ne nous reste plus qu'à établir l'autre inclusion.
Soit $y \in Imf$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x) \in E$.
On peut décomposer x dans $Im(f) \oplus Ker(f)$:

$$\exists (x_1, x_2) \in Imf \times Kerf \ / \ x = x_1 + x_2.$$

On compose par f, on obtient $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) \in Imf^2$.

D'où $Imf \subset Imf^2$ et donc $Imf^2 = Imf$.

Exercice 2

Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère la famille de vecteurs (u_1, u_2) donnés par :

$$u_1 = (1, 1, 0, 1) \ \text{ et } \ u_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Posons $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + t = 0, y + z = 0$.

1. Déterminons les dimensions des sous-espaces vectoriels F et G.

- Il est clair que (u_1, u_2) est libre, elle est génératrice de F par définition, donc c'est une base de F et par suite $\dim F = 2$.

- Pour G, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z, t) \in G \quad &\Leftrightarrow \quad z = -y,\ t = -x + y \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z, t) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Posons $u_3 = (1, 0, 0, -1)$ et $u_4 = (0, 1, -1, 1)$.
– La famille (u_1, u_2) est génératrice puisque tout élément de G est de la forme $(x, y, z, t) = xu_3 + yu_4$.
– La famille (u_3, u_4) est libre, puisque $xu_3 + yu_4 = 0 \Longrightarrow x = y = 0$.
En conclusion, G est un espace vectoriel de dimension 2 dont (u_3, u_4) est une base.

2. a. Comme $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, on a $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Soit $u \in F \cap G$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$.
Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & \lambda_4 \\ 0 & = & -\lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & -\lambda_3 + \lambda_4 \end{array} \right. .$$

On trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (ie $u = 0_{\mathbb{R}^4}$). Donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

b. On cherche 2 vecteurs $u \in F = Vect(u_1, u_2)$ et $v \in G = Vect(u_3, u_4)$ tels que $w = u + v$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $w = \underbrace{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}_{u} + \underbrace{(\lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4)}_{v}$.

Il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_4 & = & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 & = & 1 \end{array}\right. .$$

On trouve $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2$, d'où :

$$u = 2u_1 + 0u_2 = (2, 2, 0, 2) \text{ et } v = -u_3 - 2u_4 = (-1, -2, 2, -1).$$

3. a. On remarquer que $(\varepsilon_3, \varepsilon_4) \in G^2$ et ils sont libres, ils forment donc une base de G puisque $\dim G = 2$.
Au vu de la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$, on conclut que f est la projection sur $F = Vect(e_1, e_2) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ parallèlement à $G = Vect(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, il suffit d'exprimer les vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) en fonction de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

On a : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} e_1 & + & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_1 \\ & & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_2 \\ e_1 & + & e_2 & - & e_3 & & & = & \varepsilon_3 \\ e_1 & - & e_2 & + & e_3 & - & 2e_4 & = & \varepsilon_4 \end{array}\right.$.

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e_1 & + & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_1 \\ & & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_2 \\ & & & - & e_3 & - & e_4 & = & \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\ & - & 2e_2 & + & e_3 & - & 3e_4 & = & \varepsilon_4 - \varepsilon_1 \end{array}\right. ,$$

puis $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e_1 & + & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_1 \\ & & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_2 \\ & & & - & e_3 & - & e_4 & = & \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\ & & & + & e_3 & - & e_4 & = & 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 \end{array}\right. ,$$

enfin , on applique $L_4 \leftarrow \dfrac{L_4 + L_3}{-2}$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e_1 & + & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_1 \\ & & e_2 & & & + & e_4 & = & \varepsilon_2 \\ & & & - & e_3 & - & e_4 & = & -\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\ & & & & & & e_4 & = & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3/2 - \varepsilon_4/2 \end{array}\right.$$

Grâce à ce système, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{ccl} e_1 & = & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ e_2 & = & -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3/2 + \varepsilon_4/2 \\ e_3 & = & \varepsilon_2 - \varepsilon_3/2 + \varepsilon_4/2 \\ e_4 & = & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3/2 - \varepsilon_4/2 \end{array}\right. ,$$

ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Comme $M_{\mathcal{B}}(f) = P \times M_{\mathcal{B}'}(f) \times P^{-1}$, on trouve par un calcul matriciel :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. On obtient $f(w)$ grâce au produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $f(w) = 2u_1 = u$ (calculé dans la question **2b**).
Ce résultat était prévisible car f est la projection sur F parallèlement à G et on a vu dans la question **2b** que l'on pouvait décomposer $w = u + v$ dans $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, par conséquent $f(w) = u \in F$.