Séance de révision n° 9

Courbes du plan

Exercice 1

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équations paramétriques

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{t-t^3}{1+t^2}\,.$$

1. (a) Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t.
   (b) Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
   (c) Dresser le tableau des variations des fonctions x et y.
   (d) Donner l'équation de l'asymptote de Γ.
   (e) Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
   (f) Montrer que Γ possède un point double. Quel angle forment les tangentes à Γ au point double ?
   (g) Tracer Γ.
2. Former une équation cartésienne de Γ.
3. On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.
   (a) Montrer que le point $M \in \Gamma$, de paramètre t, appartient à Δ si, et seulement si :
   $$vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0\,.$$
   (b) En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant :
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \quad vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\,;$$
   donner la valeur de $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3, soient alignés.
4. Soit le point $A(1,0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.
   (a) Quel est le paramètre du point A ?
   (b) Quelle relation vérifient t_1 et t_2 ?
   (c) Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?
   (d) Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox.
5. Soit S un point de paramètre t_0.
   (a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?
   (b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?
   (c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Exercice 2

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ d'équations respectives

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad 4x^2 + y^2 = 1\,.$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$.
2. Former une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point O.
3. On considère le point A de coordonnées $(3,-2)$. Démontrer que la droite d_m du plan de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$, passant par A a pour équation
   $$y = mx - 3m - 2\,.$$

4. Exprimer, en fonction du réel m, la distance δ_m du point Ω à la droite d_m.
5. En déduire qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathcal{C}$. Donner des équations de ces deux droites et déterminer les coordonnées des points de contact de ces droites avec le cercle $\mathcal{C}$.
6. Déterminer la nature, l'excentricité, les foyers F_1 et F_2 et les directrices de la courbe plane $\mathcal{E}$.

On paramètre $\mathcal{E}$ en posant $x = \frac{1}{2}\cos t\ ;\ y = \sin t\,.$

7. Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{E}$.
8. Former une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point $B\left(\frac{1}{4}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
9. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathcal{E}$.
   (a) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point de coordonnées (x_0, y_0).
   (b) On considère la droite D d'équation $ax + by = c$ avec a et b réels non tous deux nuls.
   Montrer que la droite D est tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si $a^2 + 4b^2 = 4c^2$.
   (c) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\beta^2 \neq 1$. Montrer que la droite D passe par M si, et seulement si, $c = a\alpha + b\beta$.
   (d) On suppose que D passe par M. Montrer que
   $$D \text{ est tangente à } \mathcal{E} \iff \begin{cases} a \neq 0 \ \text{ et, en notant } m = -b/a\,, \\ (1-\beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \dfrac{1}{4} - \alpha^2 = 0\,. \end{cases}$$
   (e) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que passent deux droites tangentes à $\mathcal{E}$ par le point $M(\alpha, \beta)$. Une interprétation géométrique simple de la condition analytique est demandée.
   (f) Déterminer alors l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathcal{E}$. Construire cet ensemble.

Exercice 3

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 2\ \mathrm{ch}(t)\,, \\ y(t) = 3\ \mathrm{sh}(t)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que Γ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.
2. Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ.
   Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.
3. Déterminer le repère de Frenet $\left(M(t)\,;\,\overrightarrow{T(t)}\,,\,\overrightarrow{N(t)}\right)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.
4. Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.
5. On définit le centre de courbure $C(t)$ au point $M(t)$ par la relation $\overrightarrow{OC(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t)\cdot\overrightarrow{N(t)}$.
   Déterminer les coordonnées du centre de courbure $C(t)$.

   On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:
   $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{13}{2}\ \mathrm{ch}^3(t)\,, \\ y(t) = -\dfrac{13}{3}\ \mathrm{sh}^3(t)\,. \end{cases}$$
6. Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.
7. Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.
8. Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.
9. Tracer Γ' sur la même figure que Γ.
10. (a) Montrer les relations
   $$\begin{aligned} \mathrm{ch}(2t) &= \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) \ = \ 2\ \mathrm{ch}^2(t) - 1 \ = \ 2\ \mathrm{sh}^2(t) + 1\ ; \\ \mathrm{sh}(2t) &= 2\ \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\ . \end{aligned}$$
   (b) Calculer la longueur de l'arc de Γ' correspondant à $0 \leqslant t \leqslant 1$.