Corrigé de la séance de révision n$^{\text{o}}$ 9

Exercice 1

1.(a) On a $y = tx$ donc t est la pente d'une droite variable passant par l'origine et rencontrant Γ.

1.(b) Comme x est paire et y impaire, Γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et l'étude se fait sur $\mathbb{R}_+$.

1.(c) On a $x = -1 + \dfrac{2}{1+t^2}$ donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et $x' = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$.

Puis $y = tx$ donc $y' = tx' + x = \dfrac{-4t^2 + (1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = -\dfrac{t^4 + 4t^2 - 1}{(1+t^2)^2}$. Le trinôme du second degré $X^2 + 4X - 1$ admet pour seule racine positive $X = \sqrt{5} - 2$ et donc y' change de signe sur $\mathbb{R}_+$ pour le paramètre $t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0			$-$			
$x(t)$	1	$\searrow$	$x(t_0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$	1	$+$	0		$-$		

1.(d) On a $x \xrightarrow[t\to+\infty]{} -1^+$ et $y \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à Γ, et Γ est située à droite de celle-ci.

1.(e) D'après les expressions de x' et y', la tangente est verticale pour l'unique point de paramètre 0, qui est le point de coordonnées $(1, 0)$ et elle est horizontale pour l'unique (sur $\mathbb{R}_+$) point de paramètre t_0, qui est le point de coordonnées $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, t_0\right)$.

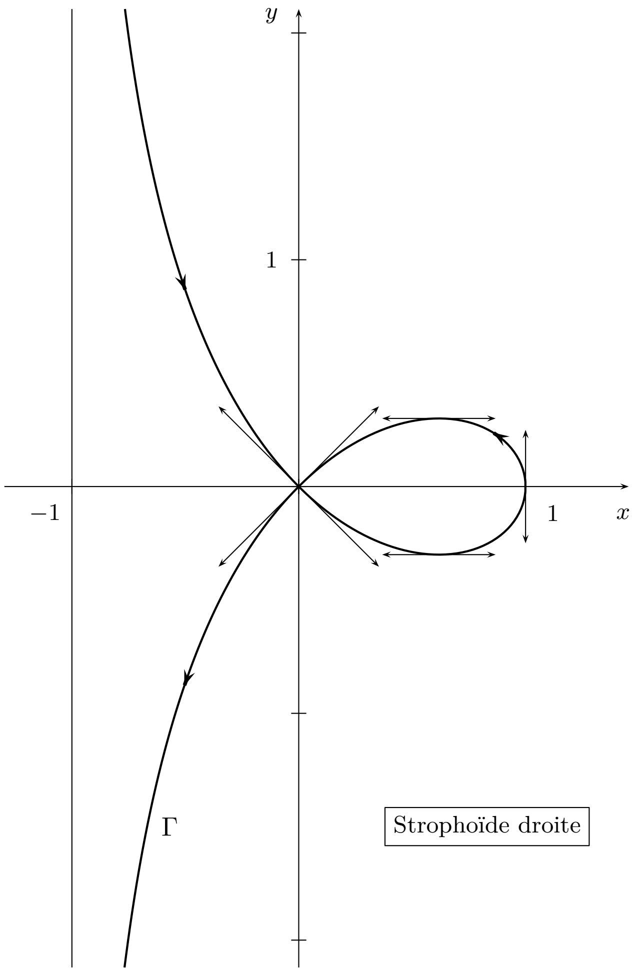
1.(f) On a $x(1) = y(1) = 0$ et par parité $x(-1) = y(-1) = 0$ donc l'origine est point double de Γ.
En $t = 1$ on a $x' = -1$ et $y' = -1$ donc la première tangente à l'origine est la première bissectrice des axes. En $t = -1$ on a $x' = 1$ et $y' = -1$ donc la seconde tangente à l'origine est la seconde bissectrice des axes. L'angle formé par ces deux tangentes est droit.

1.(g) Courbe de la strophoïde droite page suivante.

2. Soit (x, y) un point de Γ. On a $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = tx$ donc $(1+t^2)x = 1 - t^2$ d'où en multipliant par x^2 :

$$\boxed{(x^2 + y^2)x = x^2 - y^2}.$$

Réciproquement, si (x, y) vérifie cette équation, alors ou bien $x = 0$ et alors $y = 0$ et ce point est sur Γ, ou bien $x \neq 0$ et alors on peut poser $t = y/x$ ce qui donne $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = tx$.



3.(a) Il suffit de remplacer x par $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et y par tx dans l'équation de Δ.

3.(b) L'énoncé oublie de préciser que $\boxed{v \neq 0}$ sans quoi l'équation proposée ne peut avoir trois racines. Dans ce cas, en identifiant les coefficients de t dans chaque membre de l'identité de l'énoncé (relations coefficients-racines) on obtient immédiatement $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$.

3.(c) L'énoncé évoque sans-doute une CNS pour que trois points de paramètres $\boxed{\textbf{distincts}}$ t_1, t_2, t_3 soient alignés ... Supposons que tel est le cas, alors les trois points correspondants sont sur une droite Δ pour certains paramètres u, v et w non tous nuls, donc t_1, t_2 et t_3 sont trois racines distinctes du polynôme non nul $vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w)$, donc celui-ci est de degré 3, donc $v \neq 0$ ce qui implique $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$ comme ça a déjà été démontré.

Réciproquement, si $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$ alors on a $(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = t^3 - (t_1+t_2+t_3)t^2 - t - t_1t_2t_3$ donc t_1, t_2, t_3 sont trois racines distinctes du polynôme $t^3 + (u-w)t^2 - t - (u+w)$ où on a posé $\begin{cases} u - w = -(t_1+t_2+t_3) \\ u + w = t_1t_2t_3 \end{cases}$, ce qui est toujours possible car ce système est inversible. Ainsi les trois points sont alignés sur la droite Δ correspondant à ces paramètre $u, v(=1)$ et w.

4.(a) Le point A correspond au paramètre $t_3 = 0$.

4.(b) La relation cherchée est $t_1t_2 = -1$ d'après la question 5.(c), puisque A, M_1 et M_2 sont alignés sur Γ.

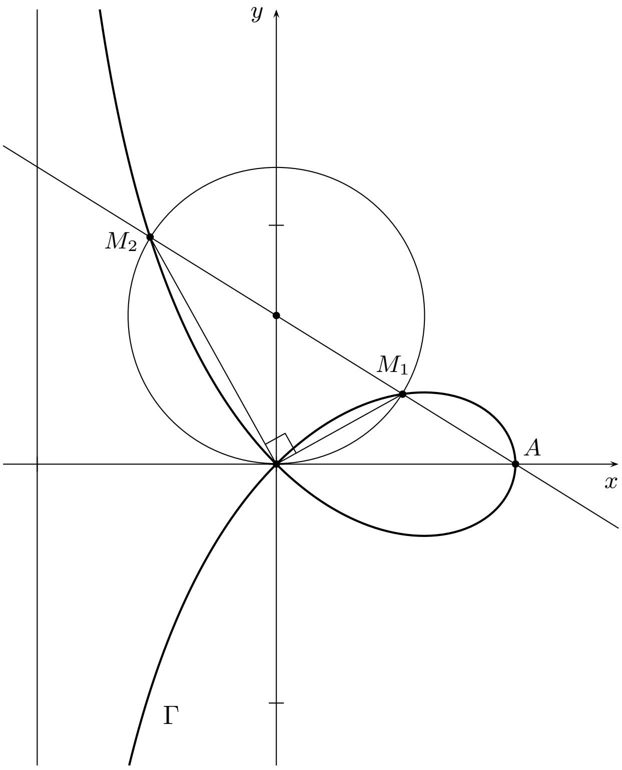
4.(c) Les droites (OM_1) et (OM_2) sont perpendiculaires, car le produit de leurs pentes t_1 et t_2 vaut -1.
Notons qu'ici, et jusqu'à la fin, la droite issue de A ne peut être horizontale sans quoi $M_1 = M_2 = O$.

4.(d) Puisque (OM_1) et (OM_2) sont perpendiculaires, le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ passe par O (théorème de l'angle au centre). Dire qu'il est tangent à (Ox), c'est dire qu'il est tangent à (Ox) en O, ou que son centre est sur (Oy), ou encore que

$x(t_1) + x(t_2) = 0$. Or

$$x(t_2) \;=\; \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} \;=\; \frac{1-\frac{1}{t_1^2}}{1+\frac{1}{t1^2}} \;=\; \frac{t_1^2-1}{t_1^2+1} \;=\; -x(t_1)\,.$$

Ainsi, le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à (Ox) en O.



5.(a) On obtient une tangente à Γ passant par S comme position limite d'une droite passant par S et recoupant Γ en deux autres points de paramètres t_1 et t_2, lorsque ces deux points deviennent confondus (c'est-à-dire lorsque t_1 et t_2 tendent vers une limite commune, notée t). L'équation $t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0 = -1$ devient alors $\boxed{t^2 + 2t_0t = -1}$.

Les deux points M' et M'' existent ssi l'équation précédente admet deux racines distinctes, ssi son discriminant est strictement positif, ssi $t_0^2 > 1 \iff \boxed{|t_0| > 1}$, ce qui correspond aux points de Γ qui ne forment pas la boucle.

5.(b) Si on note t_3 le paramètre de P et t_1, t_2 ceux de M' et M'', solutions de $t^2 + 2t_0t + 1 = 0$, alors on a $t_1 + t_2 = -2t_0$ et $t_1t_2 = 1$ (toujours d'après le relations coefficients-racines) ainsi que $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$ donc $t_3(t_1 + t_2) = -1 - t_1t_2$ ou encore $t_0t_3 = 1$ et comme t_0 n'est pas nul ($|t_0| > 1$) on en déduit que $\boxed{t_3 = \dfrac{1}{t_0}}$.

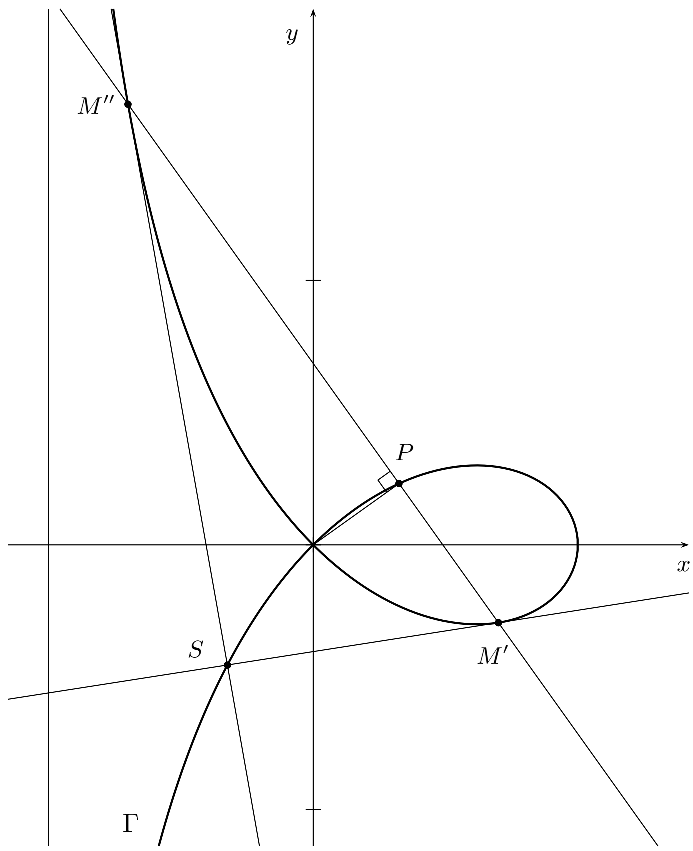
5.(c) Montrons qu'elles sont perpendiculaires et pour cela montrons que leurs pentes ont pour produit -1.

La droite (OP) a pour pente $t_3 = \dfrac{1}{t_0}$, donc il suffit de montrer que $(M'M'')$ a pour pente $-t_0$.

La pente de $(M'M'')$ est $\dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{x(t_2) - x(t_1)}$ (la droite ne peut être verticale, sinon $t_1 = -t_2$ d'où $t_0 = 0$ exclu) et, en ayant remarqué que $t_2 = \frac{1}{t_1}$, que $x(\frac{1}{t}) = -x(t)$ et que $y(\frac{1}{t}) = -\frac{1}{t}\,x(t)$ pour tout $t \neq 0$, on a

$$x(t_2) - x(t_1) \;=\; -2x(t_1)\,(\neq 0) \qquad \text{et} \qquad y(t_2) - y(t_1) \;=\; -\frac{1}{t_1}\,x(t_1) - t_1x(t_1) \;=\; -(t_1 + t_2)x(t_1)\,.$$

Le quotient cherché est $\dfrac{t_1 + t_2}{2} = -t_0$ comme voulu.



Exercice 2

1. On a $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ donc $\Omega(2,1)$ et $R = \sqrt{5}$.

2. Avec $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$, l'équation cherchée est

$$\frac{\partial F}{\partial x}(O)(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}(O)(y-0) = 0 \iff \boxed{2x + y = 0}.$$

3. Elle a pour équation $y = mx + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et elle passe par A, d'où $b = -3m - 2$.

4. Un vecteur directeur de d_m est $(1,m)$ donc un vecteur normal est $\vec{n} = (-m, 1)$. La distance cherchée est

$$\delta_m = d(\Omega, d_m) \;=\; \frac{|\overrightarrow{A\Omega} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||} \;=\; \boxed{\frac{|m+3|}{\sqrt{1+m^2}}}.$$

On pouvait aussi utiliser la formule $d(\Omega, d_m) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ avec des notations évidentes.

5. La droite d_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\delta_m = R \iff \delta_m^2 = 5 \iff (m+3)^2 = 5(m^2+1) \iff 2m^2 - 3m - 2 = 0 \iff (2m+1)(m-2) = 0\,.$$

Les deux droites cherchées sont d_2 et $d_{-\frac{1}{2}}$ et ont pour équations respectives :

$$d_2 \,:\, y = 2x - 8 \quad \text{ et } \quad d_{-\frac{1}{2}} \,:\, y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,.$$

Pour déterminer $d_2 \cap \mathcal{C}$ on a $y = 2x - 8$ et $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ d'où $x^2 - 8x + 16 = 0$ ce qui donne $x = 4$ puis $y = 0$. De même pour $d_{-\frac{1}{2}} \cap \mathcal{C}$ qui donne $x = 1$ et $y = -1$.

6. $\mathcal{E}$ est l'ellipse du plan d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=1$. Ici $0<a<b$ donc l'axe focal est (Oy) et l'axe non focal (Ox). On a $c=\sqrt{b^2-a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc les foyers sont $F_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F_2\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
L'excentricité est $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in\,]0,1[$. Enfin les deux directrices sont les droites d'équations

$$y=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

7. L'aire de la surface délimitée par l'ellipse est $\pi ab=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$. On peut la retrouver si on veut par la formule de Green-Riemann (par exemple), en écrivant

$$\mathcal{A}\;=\;\frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}}xdy-ydx\;=\;\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{2}\,dt\;=\;\frac{\pi}{2}\,.$$

8. D'abord on a bien $B\in\mathcal{E}$. Puis on trouve l'équation de la tangente en (x_0,y_0) par dédoublement des termes (ou autre) : $4x_0x+y_0y=1$ ce qui donne en B l'équation $\boxed{x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y=1}$.

9.(a) Question précédente : $\boxed{4x_0x+y_0y=1}$.

9.(b) La droite D est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si elle rencontre $\mathcal{E}$ en un point unique, c'est-à-dire si et seulement si le système $\begin{cases} ax+by=c\\ 4x^2+y^2=1\end{cases}$ admet un unique couple solution (x,y).
Si on suppose par exemple $b\neq 0$ alors le système donne $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ et l'équation du second degré $4x^2+\dfrac{(ax-c)^2}{b^2}=1\iff(4b^2+a^2)x^2-2acx+c^2-b^2=0$. Celle-ci possède une unique solution si et seulement si son discriminant est nul :

$$a^2c^2=(4b^2+a^2)(c^2-b^2)\iff 4b^2c^2-4b^4-a^2b^2=0\iff a^2+4b^2=4c^2\,.$$

On obtient la même condition si on suppose que $a\neq 0$, c'est donc la CNS cherchée.

9.(c) Évident.

9.(d) Puisque D passe par M, on a $c=a\alpha+b\beta$. Si D est tangente à $\mathcal{E}$ on a nécessairement $a\neq 0$ sans quoi $b\neq 0$, $c=b\beta$ et $a^2+4b^2=4c^2$ donc $b^2=c^2=b^2\beta^2$ d'où $\beta^2=1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Puis d'après la question 9.(b), D est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\begin{aligned}a^2+4b^2=4c^2 &\iff a^2+4b^2=4(a\alpha+b\beta)^2=4a^2\alpha^2+4b^2\beta^2+8ab\alpha\beta\\ &\iff a^2(1-4\alpha^2)+4b^2(1-\beta^2)-8ab\alpha\beta=0\\ &\iff 1/4-\alpha^2+m^2(1-\beta^2)+2m\alpha\beta=0\,.\end{aligned}$$

9.(e) Il passe deux droites tangentes à $\mathcal{E}$ par $M(\alpha,\beta)$ ssi l'équation précédente admet deux racines distinctes, c'est-à-dire ssi son discriminant est strictement positif (remarquons que c'est bien une équation du second degré car $1-\beta^2\neq 1$) :

$$\alpha^2\beta^2>(1-\beta^2)(\tfrac{1}{4}-\alpha^2)\iff\alpha^2+\tfrac{1}{4}\beta^2>\tfrac{1}{4}\iff 4\alpha^2+\beta^2>1.$$

Cette condition équivaut au fait que M soit situé à l'extérieur du domaine délimité par l'ellipse, ce qui est une CNS géométrique évidente.

9.(f) Deux droites du plan sont orthogonales ssi le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.
Or si on note $\dfrac{1}{m_1}$ et $\dfrac{1}{m_2}$ les coefficients directeurs des deux droites passant par $M(\alpha,\beta)$ (situé à l'extérieur de l'ellipse) et tangentes à $\mathcal{E}$, alors m_1 et m_2 sont les deux solutions de l'équation du second degré de la question 9.(d), donc d'après les relations coefficients-racines on a

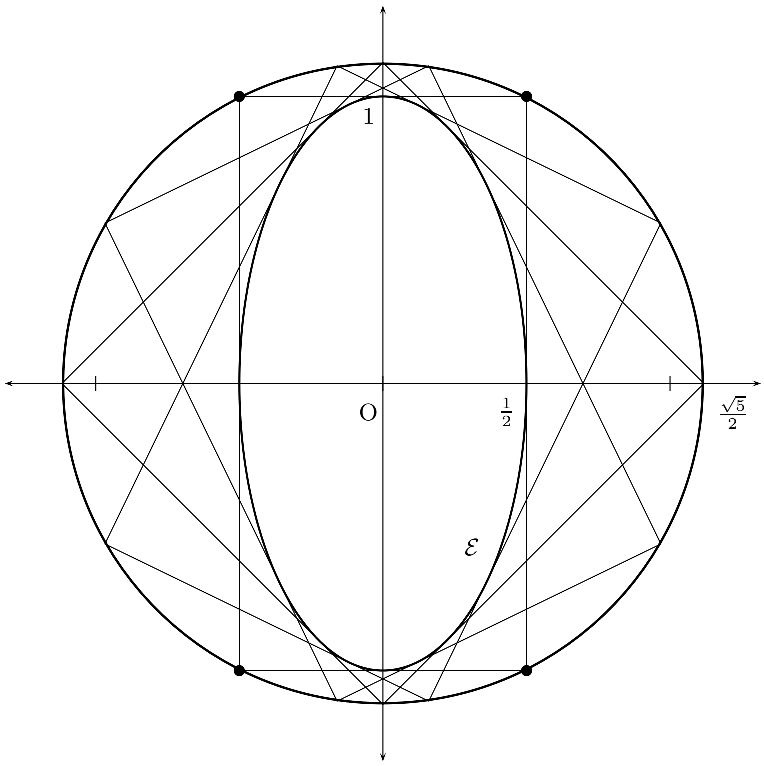
$$m_1m_2=\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{1-\beta^2}\,.$$

Le lieu cherché est l'ensemble des points $M(\alpha,\beta)$ du plan dont les coordonnées vérifient

$$\beta^2\neq 1\;\text{ et }\begin{cases}4\alpha^2+\beta^2>1\\ \dfrac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{1-\beta^2}=-1\end{cases}\iff\begin{cases}4\alpha^2+\beta^2>1\\ \alpha^2+\beta^2=\dfrac{5}{4}\end{cases}\iff\boxed{\alpha^2+\beta^2=\dfrac{5}{4}}.$$

Il reste encore à chercher les points convenables pour lesquels on a $\beta^2 = 1$. On reprend l'étude précédente pour trouver $\alpha^2 = \frac{1}{4}$ ce qui donne la même condition que précédemment et les quatre points marqués sur la figure.

Comme prévu, le **lieu orthoptique** de l'ellipse est le cercle de même centre et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.



Exercice 3

1. On a $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$ et donc Γ est la branche de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ située dans le demi-plan $x \geqslant 0$. On a $a = 2$, $b = 3$, $c^2 = a^2 + b^2 = 13$ et $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

2. Les équations des asymptotes sont obtenues soit à partir de l'équation de l'hyperbole en écrivant $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{y = \pm\dfrac{3}{2}\,x}$, soit à partir de la représentation paramétrique de Γ en écrivant par exemple $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$ et $y(t) - \dfrac{3}{2}\,x(t) = 3(\operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t)) = -3e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et de même pour $t \to -\infty$.

3. Un vecteur tangent orienté au point $M(t)$ à Γ est $x'(t)\,\vec{u} + y'(t)\,\vec{v} = 2\operatorname{sh}(t)\,\vec{u} + 3\operatorname{ch}(t)\,\vec{v}$. Celui-ci à pour norme $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t)} = \sqrt{9 + 13\operatorname{sh}^2(t)}$. Le vecteur tangent unitaire orienté est donc

$$\boxed{\overrightarrow{T(t)} = \frac{2\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}}\,\vec{u} + \frac{3\operatorname{ch}(t)}{\sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}}\,\vec{v}}$$

et donc aussi

$$\boxed{\overrightarrow{N(t)} = \frac{-3\operatorname{ch}(t)}{\sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}}\,\vec{u} + \frac{2\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}}\,\vec{v}}.$$

4. D'après les formules de Frenet, $\dfrac{\overrightarrow{N}}{R} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} \Big/ \dfrac{ds}{dt}$ donc $R \times \dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \dfrac{ds}{dt} \times \overrightarrow{N}$. Or $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}$ donc en identifiant les composantes suivant $\vec{u}$ on obtient

$$R \times \frac{d}{dt}\left(\frac{2\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{9+13\operatorname{sh}^2(t)}}\right) = -3\operatorname{ch}(t)$$

et ainsi

$$\boxed{R = -\frac{1}{6}\left(9 + 13\,\mathrm{sh}^2(t)\right)^{3/2}}.$$

5. L'abscisse de $C(t)$ est

$$x(t) + R \times \frac{-3\,\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{9 + 13\,\mathrm{sh}^2(t)}} \;=\; \frac{13}{2}(1 + \mathrm{sh}^2(t))\,\mathrm{ch}(t) \;=\; \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t)\,.$$

De même, l'ordonnée de $C(t)$ est

$$y(t) + R \times \frac{2\,\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{9 + 13\,\mathrm{sh}^2(t)}} \;=\; -\frac{13}{3}\,\mathrm{sh}^3(t)\,.$$

La courbe Γ' est donc la courbe $t \longmapsto C(t)$, c'est-à-dire la développée de Γ.

6. On a pour Γ' : $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi Γ' est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

7. Effectuons un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

$\triangleright$ $\mathrm{ch}(t) = 1 + t^2/2 + \circ(t^3)$ donc $x(t) = \frac{13}{2}\left(1 + 3t^2/2 + \circ(t^3)\right)$ d'où on tire $x'(0) = 0\,,\ x''(0) = \frac{39}{2}\,,\ x^{(3)}(0) = 0$.

$\triangleright$ $\mathrm{sh}(t) = t + \circ(t)$ donc $y(t) = -\frac{13}{3}\left(t^3 + \circ(t^3)\right)$ d'où $y'(0) = y''(0) = 0$ et $y^{(3)}(0) = -26$.

On voit donc qu'on a affaire à un point singulier, que la tangente en ce point est dirigée par $\vec{u}$ et qu'enfin, avec les notations habituelles on a « $p = 2$ » et « $q = 3$ » c'est donc un point de rebroussement de première espèce.

8. On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = -\dfrac{2}{3}\,\mathrm{th}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\dfrac{2}{3}$ puis $y(t) + \dfrac{2}{3}\,x(t) = \dfrac{13}{3}\left(\mathrm{ch}^3(t) - \mathrm{sh}^3(t)\right) = \dfrac{13}{3}\,\dfrac{6e^t + 2e^{-3t}}{8} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}\,x$ est direction asymptotique de Γ' pour $t \to +\infty$ (mais pas asymptote). De même pour la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}\,x$ (pour $t \to -\infty$).

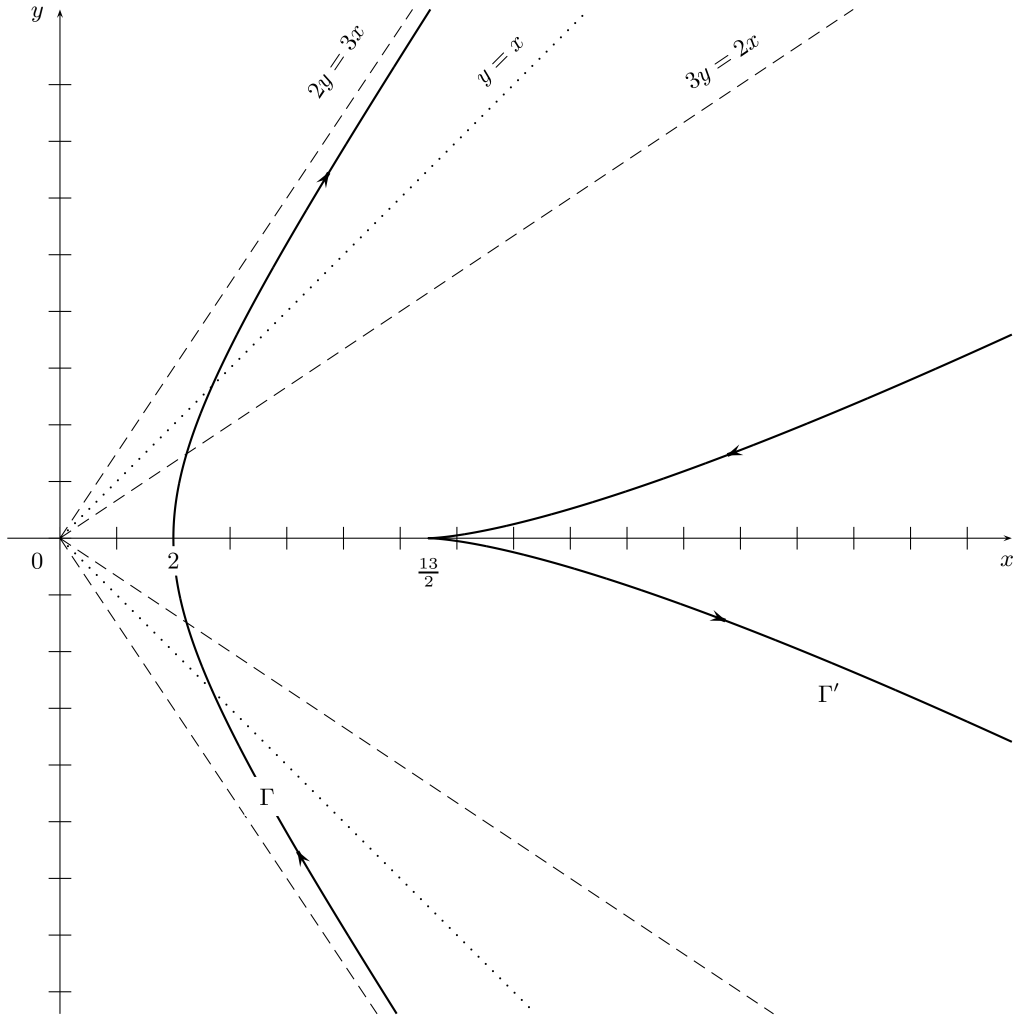
On passe de l'équation des asymptotes de Γ à celles des directions asymptotiques de Γ' en échangeant les lettres x et y, on en déduit que ces directions sont symétriques par rapport aux bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$.

10.(a) C'est immédiat : revenir aux exponentielles.

10.(b) On a $x' = \dfrac{3}{2} \times 13\,\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}(t)$ et $y' = -13\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)$ donc

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\sqrt{9\,\mathrm{ch}^2(t) + 4\,\mathrm{sh}^2(t)} = \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\sqrt{9 + 13\,\mathrm{sh}^2(t)}\,.$$

La longueur cherchée est $\displaystyle\int_0^1 s'(t)\,dt = \left[\frac{1}{6}\,(9 + 13\,\mathrm{sh}^2(t))^{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{(9 + 13\,\mathrm{sh}^2(1))^{3/2} - 27}{6}}$.



y
x
0
2
13/2
2y = 3x
y = x
3y = 2x
Γ
Γ′