- CC1-S2 - - 2016-2017 -

– Correction - Géométrie –

EXERCICE 1

On notera $x(t) = e^{\sin(2t)}$ et $y(t) = e^{\cos(t)}$.

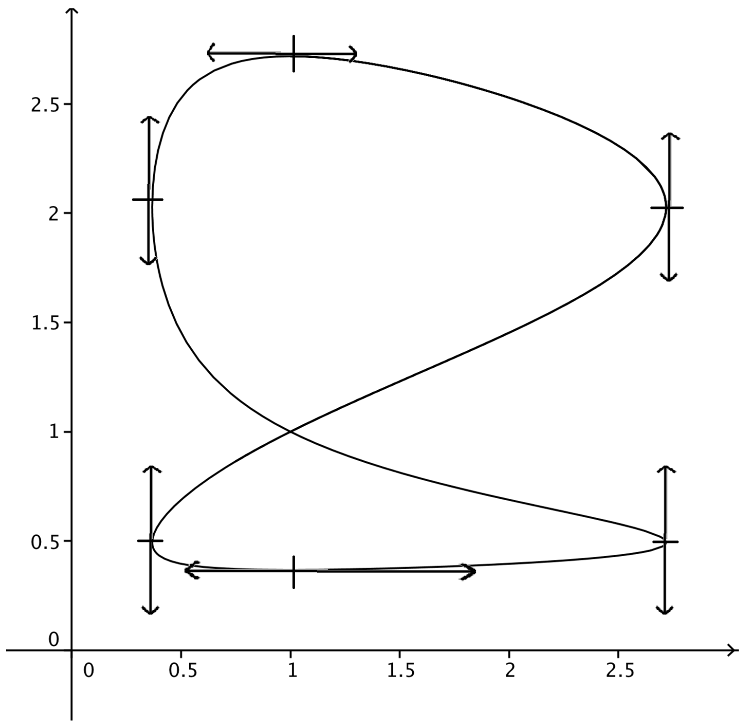
1. On remarque que ces deux fonctions sont périodiques de période 2π, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$.
D'autre part, les dérivées sont :

$$x'(t) = 2\cos(2t)e^{\sin(2t)} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\sin t e^{\cos(t)}.$$

Le tableau de variations est donc le suivant :

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π		$5\pi/4$		$7\pi/4$		2π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$x(t)$			e						e				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				$1/e$						$1/e$		
$y(t)$	e												e
		$\searrow$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$								$e^{\sqrt{2}/2}$	$\nearrow$	
				$\searrow$	$e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$				$e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\nearrow$			
						$\searrow$	$1/e$	$\nearrow$					
$y'(t)$	0			$-$			0			$+$			

On obtient alors la courbe suivante :



2. Sur la courbe, il semble bien que le point $(1, 1)$ soit un point double.
Vérifions par le calcul. On cherche $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$\begin{cases} \exp(\sin(2t_1)) = \exp(\sin(2t_2)) \\ \exp(\cos(t_1)) = \exp(\cos(t_2)) \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(2t_1) = \sin(2t_2) \\ \cos(t_1) = \cos(t_2) \end{cases}$$

Intéressons-nous d'abord à la deuxième équation. Elle implique que $t_2 = t_1 + 2k\pi$ ou $t_2 = -t_1 + 2k\pi$, avec k un entier relatif. Mais puisque t_1 et t_2 sont deux réels distincts de $[0, 2\pi[$, la première égalité est impossible, et la deuxième ne peut être vrai que pour $k = 1$.
On a donc $t_2 = -t_1 + 2\pi$, et t_1 doit vérifier l'équation :

$$\sin(2t_1) = \sin(-2t_1 + 4\pi) = \sin(-2t_1).$$

Cette équation entraîne que $2t_1 = -2t_1 + 2k'\pi$ ou $2t_1 = \pi + 2t_1 + 2k'\pi$, avec k' un entier relatif.
Le deuxième cas est impossible. Il reste donc $4t_1 = 2k'\pi$, dont les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $t_1 = 0$, à exclure car alors $t_2 = 2\pi$, $t_1 = \pi/2$, $t_1 = \pi$, à exclure également car dans ce cas $t_2 = t_1 = \pi$, et $t_1 = 3\pi/2$.
En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, on trouve bien le point double $(1, 1)$.

EXERCICE 2

La courbe paramétrée par :

$$t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2 - 9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$$

est définie sur $]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$.

On étudie donc les branches infinies au voisinage de 4 valeurs de t :

- Pour t tendant vers -3, $y(t)$ tend vers $-5/2$ et $x(t)$ tend vers $-\infty$ si t tend vers -3 par valeur inférieure, et vers $+\infty$ si t tend vers -3 par valeurs supérieures.
  La droite d'équation $y = -5/2$ est donc asymptote à la courbe pour t tendant vers -3.

- En 3 : cette fois, à la fois $|x(t)|$ et $|y(t)|$ tendent vers $+\infty$ si t tend vers 3. On va étudier comment se comporte le quotient. On a :
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(t-2)(t+3)}{t^3} \to \frac{2}{3}$$
  et :
$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{t(t^2 + 3t - 18)}{3(t-3)(t+3)} = \frac{t(t+6)}{t(t+3)} \to \frac{3}{2}.$$
  On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe (pour $t \to 3$).

- Pour t tendant vers $+\infty$, on a encore $|x(t)|$ et $|y(t)|$ qui tendent vers $+\infty$, et le calcul précédent donne :
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(t-2)(t+3)}{t^3} \to 1.$$
  On calcule cette fois
$$y(t) - x(t) = \frac{t(t-6)}{(t-3)(t+3)} \to 1.$$
  La droite $y = x + 1$ est donc asymptote à la courbe pour t tendant vers $+\infty$.

- Le raisonnement est complètement similaire pour t tendant vers $-\infty$.