- CC1-S2 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

L'écriture matricielle du système différentiel est :

$$Y' = AY + B, \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ t \end{pmatrix}$$

On diagonalise la matrice A, et on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

On résout le nouveau système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} + t\right) \\ y_1' = -2y_1 + \frac{1}{4}\left(-\mathrm{e}^{2t} + 3t\right) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4} t\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{16} \\ y_1 = \mu \mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{8}t - \frac{3}{16} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Finalement, les solutions du système différentiel sont :

$$\begin{cases} x(t) = 3\lambda \mathrm{e}^{2t} - \mu \mathrm{e}^{-2t} + \left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{4}t \\ y(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{-2t} + \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 2

1. a. En remarquant que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[\,, \ \frac{2-x}{x(x-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x},$$

on obtient :

$$S_{H_1} = \left\{ y :]0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto C_0 \frac{1-x}{x^2}, C_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

b. En intégrant on trouve :

$$S = \left\{ z :]0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto C_1 \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) + C_2, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. a. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

On introduit ceci dans l'équation on obtient :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve $a_0 = 0$, $a_2 = 2a_1$, puis, pour $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Ainsi, par récurrence, on trouve $a_n = na_1$.

Puisque la série entière $\sum_{n\geq 1} nx^n$ a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction :

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur $]-1,1[$ (en réalité, sur $]-\infty,1[$).

b. On va résoudre l'équation sur $]0,1[$, par la méthode de Lagrange.
Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$.
Sachant que f est solution de l'équation, on trouve que y est aussi solution si et seulement si z vérifie l'équation différentielle :

$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

Remplaçant f par sa valeur, simplifiant par x, et après regroupement, on trouve :

$$x(x-1)z'' + (x-2)z' = 0.$$

Ainsi z' est solution de (H_1) donc $z \in S$ établi dans la question **1.b**. On en déduit :

$$S_{H_2} = \left\{ y :]0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(1 + x\ln x) + C_2 x}{(1-x)^2}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$