- CC2-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

1. a. • Pour $(P,Q) \in (E_n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u_n(\lambda P + Q) = \lambda u_n(P) + u_n(Q)$ car la dérivation est linéaire, d'où la linéarité de u_n.

• $P \in E_n \Rightarrow$ degré$(P) \leqslant n \Rightarrow$ (degré$(P'') \leqslant n-2$ et degré$(XP') \leqslant n$) $\Rightarrow$ degré$(u_n(P)) \leqslant n \Rightarrow u_n(P) \in E_n$, donc $u_n(E_n) \subset (E_n)$.

Conclusion : u_n est bien un endomorphisme de E_n.

b. Pour tout entier $k \leqslant n$, on a $u_n(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$, ce qui nous donne alors :

$$M_{B_n}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix}.$$

c. Cette matrice étant triangulaire, on en déduit immédiatement que $Sp(u_n) = \{0, -2, \cdots, -2n\}$ et, puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes, que u_n est diagonalisable.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

i. Montrons par récurrence que la dérivée d'ordre n de f est de la forme $f^{(n)} = f \times H_n$ où $H_n \in E_n$ et $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$:

• $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-x^2} = f(x) \times X^0$ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Or $X^0 \in H_0$ et $-2X = 0 - 2X = (X^0)' - 2X \times X^0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

• Supposons que $f^{(k)} = f \times H_k$ où $H_k \in E_k$. On a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = f'(x)H_n(x) + f(x)H_n'(x) = f(x)\left[-2xH_n(x) + H_n'(x)\right] = f(x) \times H_{n+1}(x),$$

où $H_{n+1} = -2XH_n + H_n' \in E_{n+1}$, d'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien $f^{(n)} = f \times H_n$ avec $H_n \in E_n$ qui vérifie $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$.

ii. Par une récurrence immédiate, puisque on a $H_0 = X^0$ et $H_{k+1} = -2XH_k + H_k'$, on montre que tout polynôme H_k est de degré k, donc que $B_n' = (H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une famille de polynômes étagés en degrés, donc une base de E_n.

b. On considère un entier naturel n non nul. On a, d'après la formule de Leibniz :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(-2xe^{-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \frac{d^k}{dx^k}(-2x) \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(e^{-x^2}\right).$$

Comme $\dfrac{d^k}{dx^k}(-2x) = 0$ pour $k \geqslant 2$, on obtient :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{k}{n} \frac{d^k}{dx^k}(-2x) \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(e^{-x^2}\right) = -2x\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) - 2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right),$$

ce qui s'écrit également :

$$f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x),$$

d'où l'on déduit, à l'aide de la question **2.a** et en simplifiant par $f(x) = e^{-x^2}$ qui est toujours non nul, que l'on a bien :

$$H_{n+1} = -2XH_n - 2nH_{n-1}.$$

c. On déduit immédiatement des questions **2.a** et **2.b** que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$H_{n+1} = H_n' - 2XH_n = -2XH_n - 2nH_{n-1} \Rightarrow H_n' = -2nH_{n-1}.$$

d. On considère un couple d'entiers (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On a, d'après la question précédente, $H_k' = -2kH_{k-1}$.

Par dérivation de cette relation on obtient $H_k'' = -2kH_{k-1}'$.

De ces deux relations on déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} u_n(H_k) &= H_k'' - 2XH_k' \\ &= -2kH_{k-1}' - 2X \times (-2kH_{k-1}) \\ &= -2k(H_{k-1}' - 2XH_{k-1}) \\ &= -2kH_k \qquad \text{d'après la question } \mathbf{2.a} \end{aligned}$$

Le polynôme H_k étant non nul (puisque élément d'une base), on en déduit que c'est un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre $-2k$.

e. On en déduit immédiatement que l'on a :

$$M_{B_n'}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui admet $\lambda = \dfrac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}$ pour racine. Or on sait que les polynômes réels qui admettent une racine complexe admette également sa conjuguée et qu'un polynôme caractéristique est unitaire, donc :

$$\chi_f = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) = \left(X - \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}\right) = X^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.$$

2. Le théorème de Cayley-Hamilton nous permet d'affirmer que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, donc que l'on a bien $f \circ f + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f + \dfrac{1}{2} Id_E = 0$.

3. Soit a un vecteur non nul de E.

a. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xa + yf(a) = 0$.
Si $y \neq 0$, alors on a $f(a) = -\dfrac{x}{y}a$, ce qui implique (puisque a est non nul) que $-\dfrac{x}{y}$ est valeur propre de f, ce qui est impossible puisque les deux racines de χ_f sont complexes non réelles.
On a donc $y = 0$, donc $xa = 0$, et donc $x = 0$ (puisque a est non nul).
On en déduit que $B = (a, f(a))$ est libre dans E (qui est de dimension 2), donc une base de E.

b. On a vu que l'on avait $f \circ f + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f + \dfrac{1}{2} Id_E = 0$, ce qui implique que $f(f(a)) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} f(a) - \dfrac{1}{2} a$, et donc que :

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

c. On a $\chi_A = \chi_f = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = \left(X - \dfrac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \dfrac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}\right)$ et on trouve ensuite :

$$E_\lambda = Vect(1, -2\lambda) \quad \text{et} \quad E_{\overline{\lambda}} = Vect(1, -2\overline{\lambda}).$$

On obtient alors :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2\lambda & -2\overline{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{-i}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2\overline{\lambda} & -1 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

et on en déduit :

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{-i}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2\overline{\lambda}\lambda^n + 2\lambda\overline{\lambda}^n & -\lambda^n + \overline{\lambda}^n \\ 4\overline{\lambda}\lambda^{n+1} - 4\lambda\overline{\lambda}^{n+1} & 2\lambda^{n+1} + 2\overline{\lambda}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout entier n, la valeur de A^n.

4. Puisque $|\lambda| = |\overline{\lambda}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on en déduit immédiatement que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$, ce qui implique :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = 0.$$