

Math. - CC 2 - S1 - Algèbre

vendredi 25 novembre 2016 - Durée 1 h

*Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.***Exercice 1**On considère $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X et à coefficients réels.Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n et B_n la base canonique $(X^0, X, X^2, \dots, X^n)$.

1. On considère
- $n \in \mathbb{N}$
- et l'application suivante :

$$u_n : \begin{cases} E_n & \rightarrow E \\ P & \mapsto u_n(P) = P'' - 2XP' \end{cases} .$$

- Montrer que u_n est un endomorphisme de E_n .
- Donner la matrice de u_n dans la base B_n .
- Déterminer le spectre de u_n et justifier que u_n est diagonalisable.

2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = e^{-x^2} \end{cases} .$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction f est de la forme $f^{(n)} = f \times H_n$ où $H_n \in E_n$ et vérifie $H_{n+1} = H'_n - 2XH_n$.
 - Montrer que $B'_n = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de E_n .
- Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$H_{n+1} = -2XH_n - 2nH_{n-1}.$$

(On pourra utiliser la relation $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) = \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2})$ et la formule de Leibniz)

- c. En déduire que, pour tout entier naturel
- n
- non nul, on a :

$$H'_n = -2nH_{n-1}.$$

- Montrer que, pour tout couple d'entiers (k, n) tel que $0 \leq k \leq n$, H_k est un vecteur propre de u_n et donner la valeur propre correspondante.
- Donner la matrice de u_n dans la base B'_n .

T.S.V.P.

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$ –espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et un endomorphisme f de E qui admet $\lambda = \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}$ pour valeur propre.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f .
2. Justifier que $f \circ f + \frac{1}{\sqrt{2}}f + \frac{1}{2}Id_E = 0$.
3. Soit a un vecteur non nul de E .
 - a. Montrer que $B = (a, f(a))$ est une base de E .
 - b. Déterminer la matrice A de f dans la base B .
 - c. Calculer, pour tout entier n , la valeur de A^n .
4. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$.

Fin de l'énoncé d'algèbre