- CC1-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Algèbre –

EXERCICE 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

.

1. a. Calculer $\det(A)$. $\det(A) = 12$

b. Que peut-on en déduire sur f ? f est bijective.

2. Déterminer le(s) scalaire(s) $\lambda \in \mathbb{R}$ pour le(s)quel(s) l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injectif. $\lambda \in \{2; 3\}$.

3. On note $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, et $E_3 = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

a. Déterminer une base de E_2 ($E_2 = \mathrm{Vect}(2; -1; -1), (1; 0; -1)$) et une base de E_3 ($E_3 = \mathrm{Vect}(-1; 1; 1)$).

b. Montrer que $E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$. On vérifie que $\{(2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1)\}$ est libre

c. Donner la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe.
Tout vecteur a de E_2 vérifie $f(a) = 2a$, et tout vecteur b de E_3 vérifie $f(b) = 3b$, donc la matrice de f dans la base $((2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1))$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur E_2 parallèlement à E_3.
Donner la matrice de $f \circ p$ dans la base canonique.

Dans la base $((2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1))$, la matrice de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc dans cette base la matrice de $f \circ p$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dans la base canonique, la matrice de $f \circ p$ est :
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Résoudre le système suivant d'inconnue (x, y, z), en discutant suivant la valeur du paramètre m :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ m\,x + 2y - z = 1 \\ x + (1 + m)y + z = -2 \end{cases}$$

Si $m = -1$, $S = \varnothing$; Si $m = -2$, $S = \{(1 + y, y, -3)/y \in \mathbb{R}\}$; Sinon, $S = \left\{ \left(\dfrac{m+2}{m+1}, -1, \dfrac{m^2 - m - 3}{m+1} \right) \right\}$.