

**Math. - CC 1 - S1 - Algèbre**

vendredi 07 octobre 2016 - Durée 1 h

---

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

**EXERCICE 1**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $f$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.
  - a. Calculer  $\det(A)$ .
  - b. Que peut-on en déduire sur  $f$ ?
2. Déterminer le(s) scalaire(s)  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour le(s)quel(s) l'endomorphisme  $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  n'est pas injectif.
3. On note  $E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ , et  $E_3 = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .
  - a. Déterminer une base de  $E_2$  et une base de  $E_3$ .
  - b. Montrer que  $E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$ .
  - c. Donner la matrice de  $f$  dans une base adaptée à cette somme directe.
4. Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  la projection sur  $E_2$  parallèlement à  $E_3$ .  
Donner la matrice de  $f \circ p$  dans la base canonique.

**EXERCICE 2**

Résoudre le système suivant d'inconnue  $(x, y, z)$ , en discutant suivant la valeur du paramètre  $m$  :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ m x + 2y - z = 1 \\ x + (1 + m)y + z = -2 \end{cases}$$

**Fin de l'énoncé d'algèbre**