- CC1-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. • La fonction $f : t \mapsto \sqrt{\tan t}$ est continue et donc localement intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

• De plus, la fonction f est de signe constant (positif) avec :

$$f(t) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{\frac{1}{2}}},$$

on en déduit que I converge (Riemann).

2. On trouve :

$$\frac{u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right)$$

3. Le changement de variable suivant :

$$\left|\begin{array}{ccc} \left[0; \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & u = \sqrt{\tan t} \end{array}\right.$$

qui est bien un C^1- difféomorphisme, nous donne :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\, du.$$

La question précédente nous donne alors :

$$\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right)$$

et les mises sous forme canonique :

$$u^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(u \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

permettent d'intégrer et d'obtenir :

$$I = \lim_{x \to +\infty} I(x),$$

avec :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^x \frac{2u^2}{1+u^4}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right) du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x \left(\frac{2u - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right) du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right) du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$I = \frac{\ln 1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 2

1. En notant :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(\sin x)\,dx,$$

le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ nous donne :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\cos t)\,dt$$

En remarquant alors que la fonction $t \mapsto tf(\cos t)$ est impaire, on en déduit que $I = 0$, ce qui nous donne l'égalité demandée.

2. On a ici $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ pour $f : u \mapsto \dfrac{u^{2n}}{(1-u^2)^n + u^{2n}}$, donc la question précédente nous donne :

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$ étant $\pi-$périodique, on obtient :

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

En remarquant ensuite que le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ et la $\pi-$périodicité de $x \mapsto \dfrac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$ nous donnent :

$$J_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = K_n,$$

on obtient :

$$J_n + K_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = \pi.$$

On trouve ainsi $J_n = K_n = \dfrac{\pi}{2}$, et donc finalement :

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}.$$