

CORRIGÉ DE LA SÉANCE DE RÉVISION N° 8

Exercice 1

1.(a) Notons $f = (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $g : (x, y) \mapsto y^2 - 1$. Les fonctions f et g sont continues (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynômes à deux indéterminées, et f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

De l'identité $h = \sqrt{} \circ f + g$ et de la continuité de la fonction $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.(b) La restriction de f à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\sqrt{}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc les théorèmes généraux assurent que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y.$$

1.(c) La première application partielle de h en $(0, 0)$ est l'application $x \mapsto h(x, 0) = |x| - 1$, et celle-ci n'est pas dérivable en 0, donc $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$ n'a pas de sens.

De même, $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$ n'a pas de sens car la seconde application partielle $y \mapsto h(0, y) = |y| + y^2 - 1$ n'est pas dérivable en 0.

2.(a) On remarque que, si on note $B(O, 2)$ la boule ouverte, pour la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$, de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 2, alors

$$\mathcal{U} = B(O, 2) \setminus \{(0, 0)\} = B(O, 2) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

Mais, d'après le cours, $B(O, 2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et, puisque $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est également un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux ouverts.

2.(b) Cherchons les points critiques de h dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\vec{\nabla} h(x, y) = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{|y|} + 2 = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible, donc h n'a pas de point critique dans $\mathcal{U}$.

2.(c) L'ensemble D est un **compact** de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un ensemble fermé et borné, puisque c'est la boule fermée $\overline{B}(O, 2)$ de centre O et de rayon 2. De plus, h est continue sur D , et par conséquent, elle est bornée sur D et atteint ses bornes.

Le plus simple ici est de remarquer que

$$\forall (x, y) \in D, \quad -1 \leq h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1 \leq 2 + y^2 - 1 \leq 5,$$

et la valeur -1 est atteinte si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ et $y^2 = 0$, c'est-à-dire $(x, y) = (0, 0)$, tandis que la valeur 5 est atteinte si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ et $y^2 = 4$, c'est-à-dire $(x, y) = (0, 2)$ ou $(x, y) = (0, -2)$.

Exercice 2

Partie I

1. G est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathcal{P}$ (demi-plan ouvert) comme composée de $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ qui est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{P}$ et de la fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a successivement, et sans oublier de simplifier les expressions au maximum,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

d'où $\Delta G = 0$ sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire G est harmonique sur $\mathcal{P}$.

2. • Supposons que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que la fonction $F = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \end{array} \right)$ soit harmonique sur $\mathcal{P}$. Alors,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{x^2}{y^4} \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) ,$$

et donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \quad 0 = \Delta f = \frac{1}{y^2} \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{2x}{y^3} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{x^2}{y^4} \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) ,$$

d'où, en multipliant par $y^2 \neq 0$,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \quad \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) + 2 \frac{x}{y} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{x^2}{y^2} \varphi'' \left(\frac{x}{y} \right) = 0 .$$

C'est vrai pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{P}$, donc en particulier pour $y = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \varphi''(x) + 2x \varphi'(x) = 0 \\ \implies & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} [(1 + x^2) \varphi'(x)] = 0 \\ \implies & \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \varphi'(x) = K \\ \implies & \exists (K, L) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\varphi(x) = K \arctan x + L} . \end{aligned}$$

• Réciproquement, si φ est de la forme précédente, alors $F(x, y) = K \arctan \left(\frac{x}{y} \right) + L$ donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ d'après la question précédente.

3. Preuve et résultat ♡. Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$h'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \left(-\frac{1}{t^2} \right) \frac{1}{1+1/t^2} = 0 ,$$

donc h est constante sur chacun des **intervalles** (mot indispensable dans cette preuve) $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

De plus, $h(1) = \frac{\pi}{2}$ et $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (ou bien : h est impaire), donc $h(t) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } t > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

4. ► 1^{re} méthode : pour $\boxed{x > 0}$, l'argument de $x + iy$ dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par $\text{Arg}(x + iy) = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$. Ainsi,

- Si $x > 0$, $\text{Arg}(x + iy) \stackrel{(3.)}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\pi}{2} - G(x, y)$.

- Si $x < 0$, $\text{Arg}(x + iy) = \pi + \text{Arg}(-x - iy) \stackrel{(-x > 0)}{=} \pi + \arctan \left(\frac{-y}{-x} \right) \stackrel{(3.)}{=} \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{-x}{-y} \right) = \frac{\pi}{2} - G(x, y)$.

- Si $x = 0$, $\text{Arg}(x + iy) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - G(x, y)$.

Finalement,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \quad \boxed{G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(x + iy)} .$$

► 2^{de} méthode : pour $(x, y) \in \mathcal{P}$ on a $x + iy = \frac{x^2 + y^2}{x - iy} = \frac{i(x^2 + y^2)}{y + ix}$ donc

$$\text{Arg}(x + iy) = \text{Arg} \left(\frac{i(x^2 + y^2)}{y + ix} \right) \stackrel{(\star)}{=} \text{Arg}(i(x^2 + y^2)) - \text{Arg}(y + ix) \stackrel{(y > 0)}{=} \frac{\pi}{2} - G(x, y) .$$

($\star$) En effet, le membre de droite est un argument de $x + iy$ et il appartient à $] -\pi, \pi]$ puisqu'il vaut $\frac{\pi}{2} - G(x, y)$ avec $G(x, y) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

5. On a $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} G(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \stackrel{\text{not}}{=} g(x).$

Pour $(x, y) \in \mathcal{P}$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}^*$, et on a pour $T > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt &= \frac{\pi}{2} \int_0^T \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{\pi}{2} \left[\arctan\left(\frac{t-x}{y}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\arctan\left(\frac{T-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right] \\ &\xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} + G(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} + G(x, y) \right]$.

De même, pour $T < 0$ on a,

$$\begin{aligned} \int_T^0 \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt &= -\frac{\pi}{2} \int_T^0 \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = -\frac{\pi}{2} \left[\arctan\left(\frac{t-x}{y}\right) \right]_T^0 \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{T-x}{y}\right) \right] \\ &\xrightarrow{T \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} \left[G(x, y) - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2} \left[G(x, y) - \frac{\pi}{2} \right]$.

Conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \text{ converge et vaut } \pi G(x, y)}.$$

Partie II

1. La conique $\mathcal{F}_\alpha$ est correctement définie lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- Si $\alpha < 0$, $\mathcal{F}_\alpha = \emptyset$ car l'équation cartésienne n'admet pas de couple solution.

- Si $\alpha > 1$, $\mathcal{F}_\alpha$ admet pour équation réduite $\frac{x^2}{(\sqrt{\alpha})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\alpha-1})^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\alpha}$ et $b = \sqrt{\alpha-1}$ et il s'agit donc d'une ellipse centrée en l'origine, d'axe focal (Ox) (car $a > b$) et dont les foyers sont $F_0^{(c)}$ et $F_0^{(-c)}$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, d'où $F_0^{(1)}$ et $F_0^{(-1)}$.

- Si $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{F}_\alpha$ admet pour équation réduite $\frac{x^2}{(\sqrt{\alpha})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{1-\alpha})^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\alpha}$ et $b = \sqrt{1-\alpha}$ et il s'agit donc d'une hyperbole centrée en l'origine, d'axe focal (Ox) et dont les foyers sont $F_0^{(c)}$ et $F_0^{(-c)}$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, d'où à nouveau $F_0^{(1)}$ et $F_0^{(-1)}$.

2. • Ψ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, mais vu la question précédente il suffit de l'étudier sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[\stackrel{\text{not}}{=} D$. Pour tout $\alpha \in D$ on a $\Psi'(\alpha) = -\frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{(\alpha-1)^2} < 0$ donc Ψ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. De plus on a $\Psi \xrightarrow{0+} +\infty$; $\Psi \xrightarrow{1-} -\infty$; $\Psi \xrightarrow{1+} +\infty$; $\Psi \xrightarrow{+\infty} -1$. Puisque Ψ est continue sur D , on conclut grâce au théorème de la bijection qu'elle induit une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$ ainsi qu'une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

• On remarque que $M_0 \in \mathcal{F}_\alpha \iff \Psi(\alpha) = 0$ et d'après l'étude précédente, il existe exactement deux valeurs de α (l'une notée α_1 dans $]0, 1[$ et l'autre notée α_2 dans $]1, +\infty[$) telles que $\Psi(\alpha) = 0$. Il existe donc exactement deux valeurs de α telles que $M_0 \in \mathcal{F}_\alpha$. De plus, $\alpha_1 \in]0, 1[$ donc $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ est une hyperbole et $\alpha_2 > 1$ donc $\mathcal{F}_{\alpha_2}$ est une ellipse.

• Soit α tel que $M_0 \in \mathcal{F}_\alpha$. On a

$$\frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\alpha-1} = 1 \implies (\alpha-1)x_0^2 + \alpha y_0^2 = \alpha(\alpha-1) \implies \alpha^2 - (1+x_0^2+y_0^2)\alpha + x_0^2 = 0$$

donc α_1 et α_2 sont les racines du trinôme du second degré $X^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2)X + x_0^2 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ d'où (relations entre coefficients et racines),

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + x_0^2 + y_0^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha_1 \alpha_2 = x_0^2}.$$

• Si $x_0 = 0$ alors l'équation $\frac{y_0^2}{\alpha - 1} - 1 = 0$ d'inconnue α admet une unique solution, donc une seule conique de la famille $\mathcal{F}$ passe par M_0 , et cette solution est $\alpha = 1 + y_0^2 > 1$ donc cette conique est une ellipse.

3. Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ avec $x_0 \neq 0$. Les deux coniques de la famille $\mathcal{F}$ passant par M_0 sont

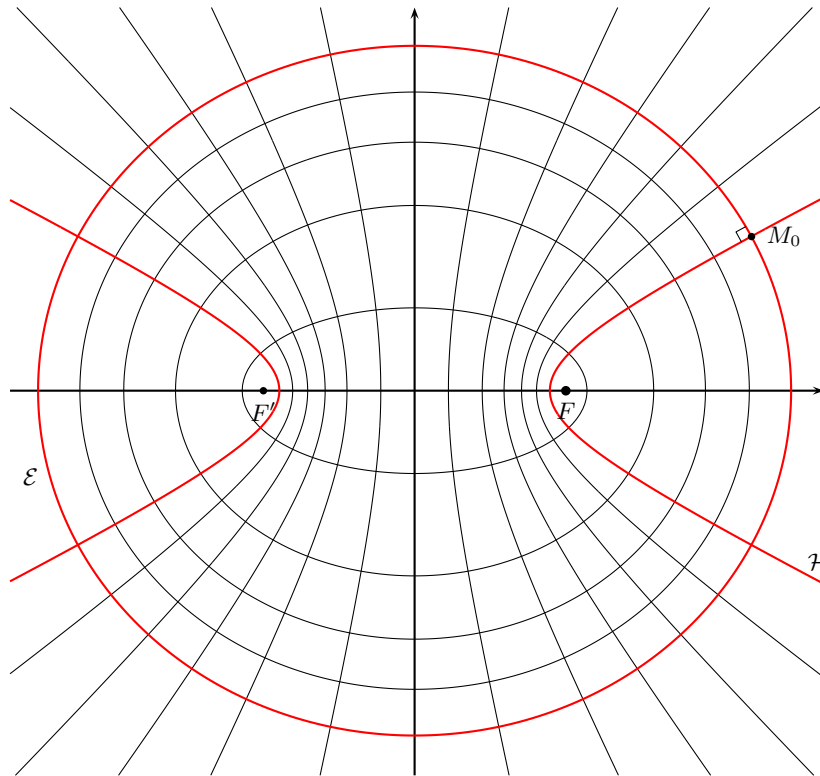
$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_1 - 1} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E} : \frac{x^2}{\alpha_2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - 1} - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha_1 < 1 \text{ et } \alpha_2 > 1.$$

Un vecteur normal à $\mathcal{H}$ en M_0 est donné par le gradient en ce point : $\vec{n}_1 = \left(\frac{2x_0}{\alpha_1}, \frac{2y_0}{\alpha_1 - 1} \right)$. De même, un vecteur normal à $\mathcal{E}$ en

M_0 est donné par le gradient en M_0 : $\vec{n}_2 = \left(\frac{2x_0}{\alpha_2}, \frac{2y_0}{\alpha_2 - 1} \right)$. Or ces vecteurs sont orthogonaux car

$$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{4x_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{4y_0^2}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} \stackrel{(2.)}{=} 4 + \frac{4y_0^2}{x_0^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2) + 1} = 0$$

et donc les tangentes en M_0 à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ sont orthogonales, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ se coupent orthogonalement.



4. x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car $x = \text{ch} \circ p_1 \times \cos \circ p_2$ où p_1 et p_2 désignent les première et seconde projections de $\mathbb{R}^2$ et sont notoirement C^∞ . Au point (u, v) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \text{sh } u \cos v \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \text{ch } u \cos v \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\text{ch } u \sin v \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\text{ch } u \cos v$$

donc $\Delta x = 0$ et finalement x est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. De même on montre que y est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\Delta y = 0$ partout sur $\mathbb{R}^2$, et on conclut que y est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

5.(a) • Droite $u = u_0$: l'image par H de la droite d'équation cartésienne $u = u_0$ est la courbe du plan de représentation paramétrique $H(u_0, v)$; ($v \in \mathbb{R}$) c'est-à-dire $\begin{cases} x = \text{ch } u_0 \cos v \\ y = \text{sh } u_0 \sin v \end{cases} \quad (v \in \mathbb{R})$. Lorsque $u_0 \neq 0$ c'est donc l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\text{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\text{sh}^2 u_0} = 1$, c'est la dire l'ellipse $\mathcal{F}_\alpha$ avec $\boxed{\alpha = \text{ch}^2 u_0} > 1$ (puisque alors $\alpha - 1 = \text{sh}^2 u_0$).

Si au contraire $u_0 = 0$ on obtient le segment $[-1, 1]$ de l'axe des abscisses.

- Droite $v = v_0$: une représentation paramétrique de son image par H est $\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v_0 \\ y = \operatorname{sh} u \sin v_0 \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$. On distingue

les cas où $\cos v_0$ ou $\sin v_0$ est nul :

- si $v_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient $\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \\ y = 0 \end{cases}$ ce qui donne la demi-droite $[1, +\infty[$ de l'axe des abscisses.
- si $v_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient $\begin{cases} x = -\operatorname{ch} u \\ y = 0 \end{cases}$ ce qui donne la demi-droite $] -\infty, -1]$ de l'axe des abscisses.
- si $v_0 \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on obtient $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \operatorname{sh} u \end{cases}$ et il s'agit donc de l'axe des ordonnées.

Dans les autres cas, c'est-à-dire si $v_0 \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, l'image par H de la droite $v = v_0$ est incluse dans l'ensemble d'équation $\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$, c'est la dire l'hyperbole F_α où $\boxed{\alpha = \cos^2 v_0} \in]0, 1[$. C'est la branche de cette hyperbole sur laquelle x a le signe de $\cos v_0$.

5.(b) Soit F_α une conique de la famille $\mathcal{F}$. Montrons qu'elle est l'image par H d'une droite verticale (dans le cas ellipse) ou la réunion des images de deux droites horizontales (dans le cas hyperbole).

Si $\alpha > 1$ on peut écrire $\alpha = \operatorname{ch}^2 u_0$ pour un certain réel $u_0 \neq 0$. Alors l'image par H de la droite $u = u_0$ est $\mathcal{F}_\alpha$ comme c'est prouvé précédemment. Si $0 < \alpha < 1$ on peut écrire $\alpha = \cos^2 v_0$ avec $v_0 \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$. L'image par H des deux droites d'équations $v = v_0$ et $v = v_0 + \pi$ constituent les deux branches de l'hyperbole F_α comme c'est prouvé plus haut.

5.(c) Soit $(u, v) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$. On a $y(u, v) = \operatorname{sh} u \sin v > 0$ donc on a bien $H(u, v) \in \mathcal{P}$.

Il s'agit de prouver que pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ il existe un unique couple $(u_0, v_0) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ tel que $H(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

- si $x_0 = 0$ on résout $\begin{cases} \operatorname{ch} u_0 \cos v_0 = 0 \\ \operatorname{sh} u_0 \sin v_0 = y_0 \end{cases}$ qui admet l'unique solution $(\operatorname{argsh} y_0, \frac{\pi}{2})$ dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$.
- si $x_0 \neq 0$, par le point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$ passe une unique hyperbole F_{α_1} ($0 < \alpha_1 < 1$) et une unique ellipse F_{α_2} ($\alpha_2 > 1$) de la famille $\mathcal{F}$. On a alors

$$\begin{aligned} H(u_0, v_0) = M_0 &\iff \begin{cases} H(u_0, v_0) \in \mathcal{F}_{\alpha_1} \text{ et } \cos v_0 \text{ a le signe de } x_0 \\ H(u_0, v_0) \in \mathcal{F}_{\alpha_2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 = \cos^2 v_0 \text{ et } \cos v_0 \text{ a le signe de } x_0 \\ \alpha_2 = \operatorname{ch}^2 u_0 \end{cases} \end{aligned}$$

et puisque ce dernier système admet un unique couple solution (u_0, v_0) dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$, c'est que H induit bien une bijection de cet ensemble dans $\mathcal{P}$.

6. Soit $f \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ et $g = f \circ H$. On a alors $g \in C^\infty([0, +\infty[\times]0, \pi[, \mathbb{R})$ et on écrit

$$\forall (u, v) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[, \quad g(u, v) = \underset{\text{not}}{f(x(u, v), y(u, v))} = f(x, y)$$

de sorte que les dérivées partielles premières et secondes de g s'expriment à l'aide de celles de f :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y} \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y} + \operatorname{sh} u \cos v \left[\operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] + \dots \\ &\quad \dots + \operatorname{ch} u \sin v \left[\operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ \bullet \quad \frac{\partial g}{\partial v} &= -\operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f}{\partial y} \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= -\operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y} - \operatorname{ch} u \sin v \left[-\operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] + \dots \\ &\quad \dots + \operatorname{sh} u \cos v \left[-\operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Il reste après les simplifications

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = [\operatorname{ch}^2 u \sin^2 v + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v] \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \boxed{\Delta g = (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v) \Delta f}.$$

En particulier on voit que si f est harmonique sur $\mathcal{P}$ alors $\Delta f = 0$ d'où $\Delta g = 0$ et donc $g = f \circ H$ est harmonique sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$.

Exercice 3

1. Notons φ l'application définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y)$.

Cherchons l'image de φ en résolvant l'équation $(\star) \varphi(x, y) = (a, b)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathcal{U}$. On a

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = (a, b) \\ (x, y) \in \mathcal{U} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = a \\ x^2 + y = b \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \\ y = \frac{b-a}{2} \\ a+b > 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'équation $(\star)$ admet une unique solution (x, y) dans $\mathcal{U}$ si et seulement si $(a, b) \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a+b > 0\}$. $\mathcal{V}$ est un demi-plan ouvert, donc un **ouvert convexe** de $\mathbb{R}^2$.

La restriction au but, que l'on note encore $\varphi = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 - y, x^2 + y) \end{array} \right)$ est donc une bijection, et sa bijection réciproque est

$$\varphi^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (u, v) & \longmapsto & \left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}, \frac{v-u}{2} \right) \end{array} \right)$$

La fonction φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (composantes polynomiales) et de même, φ^{-1} est de classe C^2 comme le montrent les théorèmes généraux.

2. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. f est de classe C^2 sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^2 sur $\mathcal{V}$ et on a, avec les notations habituelles légèrement abusives $f(x, y) = F(u, v)$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \frac{\partial F}{\partial u} + 2x \frac{\partial F}{\partial v} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) + 2x \left(2x \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4x \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) ; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} . \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (E) , on voit que f est solution de (E) sur $\mathcal{U}$ si et seulement si F est solution sur $\mathcal{V}$ de l'EDP élémentaire

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 ,$$

dont la solution générale s'écrit, puisque $\mathcal{V}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$,

$$F(u, v) = A(u) + B(v) \quad \text{où } A, B \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) .$$

En composant à droite par φ on obtient la solution générale de (E) sur $\mathcal{U}$

$$\boxed{f(x, y) = A(x^2 - y) + B(x^2 + y)} \quad \text{où } A, B \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) .$$