# Séance de révision n$^{o}$ 4

*Algèbre linéaire*

## Exercice 1

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de cette partie est de montrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \iff \exists\, w \in \mathcal{L}(F,G)\,,\ v = w \circ u\,.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \mathrm{Ker}(u) = n - p$ et $\dim F = r$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de $E$ de sorte que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ ?
   (b) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ soit une base de $F$. On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

   $$w(f_i) \ = \ \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

## Exercice 2

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ avec $n \geqslant 2$ et $k$ un entier, $k \geqslant 2$. On désigne par $\omega$ l'endomorphisme nul de $E$.
On considère une famille $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ de $k$ endomorphismes non nuls de $E$ tels que $\begin{cases} f_1 + f_2 + \cdots + f_k = id_E\ ; \\ f_i \circ f_j = \omega \ \text{ si } i \neq j\ . \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $j$ appartenant à $\{1, \ldots, k\}$, on a $f_j \circ f_j = f_j$.
   (b) Montrer que pour tout $j$ appartenant à $\{1, \ldots, k\}$, on a $\mathrm{Ker}(f_j - id_E) = \mathrm{Im}(f_j)$.
2. Montrer que la famille $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. Que peut-on en déduire pour $k$ ?
3. Pour tout $j$ appartenant à $\{1, \ldots, k\}$, on pose $G_j = \mathrm{Im}(f_j)$.
   (a) Montrer que

   $$\forall\, j \in \{1, \ldots, k\}\,, \forall\, x \in G_j\,, \quad f_i(x) = \delta_{i,j}\, x\ .$$

   (b) En déduire que tout vecteur $x$ de $E$ se décompose de façon unique en

   $$x = \sum_{j=1}^{k} x_j \qquad \text{avec } \forall\, j \in \{1, \ldots, k\}\,,\ x_j \in G_j\ .$$

   (c) En déduire que $k$ est inférieur ou égal à $n$.
4. On désigne par $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ une famille de $k$ réels et par $f$ l'endomorphisme $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j\, f_j$.
   (a) Calculer $f^2$.
   (b) Déterminer les valeurs de $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ pour lesquelles $f$ est un projecteur (c.-à-d. $f^2 = f$).
   Déterminer alors noyau et image de $f$.

## Exercice 3

1. Dans cette question, $E$ est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $E$, et l'application linéaire $f$ ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$,
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que $f$ est un projecteur. Quel est son rang ?
   (b) Déterminer le noyau et l'image de $f$.
2. Dans cette question, $E$ est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$.
$D$ désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et $P$ le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.
Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur $P$ parallèlement à $D$.
3. Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, $p$ désignera un projecteur de $E$, où $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans $E$.
4. Soit $q$ l'endomorphisme défini par $q = id_E - p$. Montrer que $q$ est un projecteur de $E$.
Déterminer le noyau et l'image de $q$. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.
5. Soient $p_1$ et $p_2$ deux projecteurs de $E$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
   (b) On suppose désormais que $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $q$ est un projecteur de $E$.
   (c) Montrer alors que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$.

## Exercice 4

$n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ désigne un espace vectoriel réel de dimension $n$.

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ qui commute avec tous les endomorphismes de $E$, c'est-à-dire tel que
$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f.$$

1. Soit $u \in E - \{0\}$. Montrer que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ possède un supplémentaire dans $E$ que l'on notera $H_u$.
On précisera la dimension de $H_u$.
2. Montrer qu'il existe un réel $\lambda_u$ tel que $f(u) = \lambda_u \cdot u$ (on utilisera le fait que $f$ commute avec le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $H_u$.)
3. Soit $v \in E$, non colinéaire au vecteur $u$ ; on note $\lambda_v$ le réel tel que $f(v) = \lambda_v \cdot v$. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$.
4. Reprendre la question précédente lorsque $v$ est non nul et colinéaire au vecteur $u$.
5. En déduire quels sont les endomorphismes de $E$ qui commutent avec tous les endomorphismes de $E$.