Chapitre 1

Suites numériques

I. Définitions et résultats fondamentaux

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, *i.e.*, une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Toutes les définitions et tous les théorèmes que nous allons donner peuvent être adaptés au cas d'une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ définie à partir d'un certain rang p.

1. Convergence d'une suite

Définition

• Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ (ou que u_n **tend** vers ℓ) si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \forall\, n \geqslant n_0,\, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note ceci $u_n \to \ell$.

• On dit que (u_n) est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $u_n \to \ell$. Dans ce cas, ℓ est unique, il est appelé **limite** de (u_n) et noté $\lim u_n$.

• Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que (u_n) **a pour limite** $+\infty$ (ou **diverge** vers $+\infty$, ou que u_n **tend** vers $+\infty$) si :

$$\forall\, A > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \forall\, n \geqslant n_0,\, u_n \geqslant A.$$

On définit de façon analogue le fait que (u_n) a pour limite $-\infty$.
On note ceci $u_n \to +\infty$ (ou $u_n \to -\infty$).

• Sinon, on dit que (u_n) **diverge**.

Démonstration de l'unicité de la limite

On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' dans $\mathbb{K}$ qui sont tous deux limites de (u_n). Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; il existe n_1 et n_2 dans $\mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \geqslant n_1, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant n_2, \quad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0 = \max\{n_1,n_2\}$,

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon.$$

Le nombre positif $|\ell - \ell'|$ est plus petit que toute constante strictement positive, il est donc nul, ce qui prouve que $\ell = \ell'$. □

Remarque – En adaptant cet argument, on montre bien sûr l'unicité de la limite y compris dans le cas des limites infinies.

Théorème de la limite monotone

- Soit (u_n) une suite croissante majorée de nombres réels. Alors (u_n) converge et $\lim u_n = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Toute suite croissante non majorée de nombres réels a pour limite $+\infty$.

Démonstration

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée et soit $M = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant M - \varepsilon$ (en effet, $M - \varepsilon < M$, donc $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$). Par croissance de (u_n), on a alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M - \varepsilon.$$

Sachant de plus que pour tout n, $u_n \leqslant M \leqslant M + \varepsilon$, on a finalement, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - M| \leqslant \varepsilon$, donc $u_n \to M$.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée et soit $A > 0$ fixé. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant A$, et par croissance de u_n, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$, ce qui montre que $u_n \to +\infty$. □

Remarques

• On a un résultat analogue pour une suite décroissante, selon qu'elle est minorée ou non (avec une limite finie ou égale à $-\infty$).

• Bien entendu, ce n'est pas la seule possibilité qu'a une suite pour converger : par exemple, la suite $((-1)^n/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 mais n'est ni croissante, ni décroissante.

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si

- (u_n) est croissante et (v_n) décroissante (ou le contraire),
- $u_n - v_n \to 0$.

Théorème

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration – Quitte à échanger les rôles de (u_n) et (v_n), on peut supposer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a en particulier $u_n \leqslant v_n + \varepsilon \leqslant v_0 + \varepsilon$ par décroissance de (v_n). Donc (u_n) est majorée. Sachant de plus qu'elle est croissante, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Soit ℓ sa limite.

On montre de même que (v_n) converge et on note ℓ' sa limite. Alors en passant à la limite dans l'inégalité $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon$ valable pour $n \geqslant n_0$, on obtient $|\ell - \ell'| \leqslant \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell = \ell'$, ce qui termine la démonstration. □

2. Suites extraites

Définition

On appelle **suite extraite** de la suite (u_n) (ou **sous-suite** de (u_n)) toute suite de la forme $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque – Une suite extraite de (u_n) est une suite constituée de certains des termes de (u_n) ; les valeurs prises par φ représentent les indices choisis (qui apparaissent par ordre strictement croissant). Les propriétés de φ entraînent immédiatement (par récurrence) que $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple – Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}) sont extraites de (u_n).

Propriété

Si (u_n) converge, alors toute suite extraite de (u_n) converge, et admet la même limite. On a un résultat analogue si (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration – On démontre le résultat dans le cas d'une limite $\ell \in \mathbb{K}$, les autres cas sont similaires. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Alors d'après la remarque précédente, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve le résultat. □

Remarque – On emploie très souvent la contraposée de cette propriété : pour montrer qu'une suite n'a pas pour limite ℓ, on en construit une suite extraite qui n'a pas pour limite ℓ; pour prouver qu'une suite diverge, on construit deux suites extraites qui ont des limites différentes. Ainsi les suites $((-1)^n)$, $(\cos(n\pi/2))$ et $(2^{n(-1)^n})$ divergent.

Inversement, on a le résultat suivant :

Propriété

Si les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. On a un résultat analogue si (u_{2n}), (u_{2n+1}) tendent vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

Démonstration – À nouveau, on fait la preuve dans le cas d'une limite $\ell \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $p \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$, $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$; en effet, soit p est pair, de la forme $2n$ avec $n \geqslant n_0$, soit il est impair, de la forme $2n + 1$ avec $n \geqslant n_1$. On a donc montré que $u_n \to \ell$. □

Exemple – On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes car

$$\begin{aligned}
&\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0,\\
&\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0,\\
&\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et donc} \quad S_{2n+1} - S_{2n} \to 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et donc, que (S_n) converge vers ℓ. Ceci montre que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

II. Suites définies par récurrence

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$, $a \in D$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ par

$$u_{n_0} = a \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant n_0, \ \ u_{n+1} = f(u_n).$$

► **Définition de la suite :** pour que l'existence de u_n entraîne l'existence de u_{n+1}, il suffit que $u_n \in D$. En général, il suffira de vérifier que D est **stable** par f, c'est-à-dire que

$$f(D) \subset D.$$

Si $a \in D$, on admettra que cela entraîne que $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est bien définie, de façon unique, et à termes dans D (l'unicité se montre facilement par récurrence, mais l'existence est plus délicate, elle est liée à la théorie des ensembles).

On supposera dans la suite que $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est bien définie avec $u_n \in D$ pour tout $n \geqslant n_0$.

► **Convergence :** le plus souvent, la fonction f est continue sur D. Donc, si (u_n) converge vers ℓ et si $\ell \in D$, alors en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$. Les solutions de cette équation sont appelés les **points fixes** de f.

Si l'équation $f(\ell) = \ell$ n'a pas de solution dans D, alors, soit la suite (u_n) est divergente, soit u_n tend vers un point du « bord » de D (y compris, éventuellement, $\pm\infty$).
On est donc amené à chercher les solutions de cette équation dans D et à vérifier si la suite (u_n) converge ou non vers un tel nombre ℓ.

Une fois les points fixes de f déterminés, la vérification de la convergence est facilitée dans les cas suivants :

• **La fonction f est contractante sur** D, c'est-à-dire

$$\exists\, k \in [0,1[, \quad \forall\, (a,b) \in D^2, |f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|. \tag{$*$}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et D est un intervalle, le théorème des accroissements finis peut permettre de trouver une valeur de k s'il en existe : si f est dérivable sur D et si $|f'| \leqslant k$ sur D, alors f est k-contractante.

Tout d'abord, l'inégalité $(*)$ assure l'unicité d'un éventuel point fixe de f dans D : si a et b sont deux points fixes de f dans D, alors d'après $(*)$, on a $|b - a| = |f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|$. Sachant que $k \in [0,1[$, cela entraîne que $a = b$.

Supposons que ℓ soit un point fixe de f dans D. En remplaçant b par $u_n \in D$ et a par $\ell \in D$ dans $(*)$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|.$$

Par récurrence sur n, on montre alors que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|.$$

Pour $n = n_0$, la propriété est vraie car $|u_{n_0} - \ell| \leqslant k^0\,|u_{n_0} - \ell|$.
Supposons la propriété vraie pour un certain entier naturel n. Alors d'après l'inégalité $(*)$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell| \leqslant k \times k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell| = k^{n+1-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$, et par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

On conclut que (u_n) converge vers ℓ car k^n tend vers 0. De plus, pour $\epsilon > 0$ fixé, on peut trouver n tel que $|u_n - \ell| < \epsilon$: il suffit que $k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell| < \epsilon$ (pour être exploitable, cela supose de connaître au moins une majoration de $|u_{n_0} - \ell|$).

• $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $f(x)-x$ **est de signe constant sur** D **;** dans ce cas la suite (u_n) est monotone.

- Si $f(x) \geqslant x$ sur D, la suite (u_n) est croissante.
- Si $f(x) \leqslant x$ sur D, la suite (u_n) est décroissante.

En effet, si $f(x) \geqslant x$ sur D, alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante. On procède de même si $f(x) \leqslant x$ sur D.

• $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et **la fonction** f **est croissante sur** D **;** dans ce cas la suite (u_n) est monotone.

- Si $f(u_{n_0}) = u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0}$, on montre par récurrence que la suite (u_n) est croissante. En effet la propriété « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » est vraie au rang n_0 et héréditaire car $u_{n+1} \geqslant u_n$ entraîne, par croissance de f, que $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.
- Si $f(u_{n_0}) = u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0}$, on montre de même que la suite (u_n) est décroissante.

Dans les cas évoqués dans les deux derniers points, le problème est donc ramené à trouver un majorant ou un minorant (qui pourra être la limite ℓ supposée) afin d'appliquer le théorème de la limite monotone.

• $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et **la fonction** f **est décroissante sur** D **;** dans ce cas la fonction $f \circ f$ est croissante.

On étudie alors les suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$. Ce sont des suites récurrentes associées à la fonction croissante $f \circ f$. Elles sont donc monotones d'après le point précédent, et en fait, elles sont de monotonie contraire : par exemple si (u_{2n}) est croissante, pour tout n tel que $2n \geqslant n_0$, $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$, donc par décroissance de f, $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$. Ainsi (u_{2n+1}) est décroissante.

Pour que (u_n) converge, il faut et il suffit que (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite, ce que l'on peut essayer de montrer en utilisant le théorème de la limite monotone et en étudiant les points fixes de $f \circ f$ dans D. Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Remarques

• Dans la pratique, pour que certaines des propriétés ci-dessus soient vraies (stabilité de D par f, comportement de f), on est souvent amené à *choisir* D en restreignant l'ensemble de définition de f, quitte à étudier plusieurs cas, chacun correspondant à un choix différent de D.

• Pour guider ce choix et bien visualiser la situation, il est souvent judicieux de commencer par un graphique, sur lequel on représente les courbes d'équation $y = x$ et $y = f(x)$. Mais bien sûr, un dessin ne constitue pas une démonstration.

► **Cas particuliers :**

• **Suite arithmétique de raison** b **:** $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n + b$. On a alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)b$.

Si $b = 0$, la suite est constante, si $b \neq 0$, la suite ne converge pas ($|u_n|$ tend vers $+\infty$).

• **Suite géométrique de raison** a **:** $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = a\, u_n$ et $u_{n_0} \neq 0$. On a alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a^{n-n_0}\, u_{n_0}$.

- si $|a| < 1$, la suite converge vers 0.
- si $|a| > 1$, la suite ne converge pas ($|u_n|$ tend vers $+\infty$).
- si $a = -1$, la suite diverge ($u_n = u_{n_0}$ si $n - n_0$ est pair, $u_n = -u_{n_0}$ sinon).
- si $a = 1$, la suite est constante.

• **Suite arithmético-géométrique :** $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = a\, u_n + b$ avec $a \neq 1$.

L'unique point fixe de $f : x \mapsto a\,x + b$ est $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. On se ramène à l'étude d'une suite géométrique définie par $v_n = u_n - \ell$. En effet, pour tout $n \geqslant n_0$,

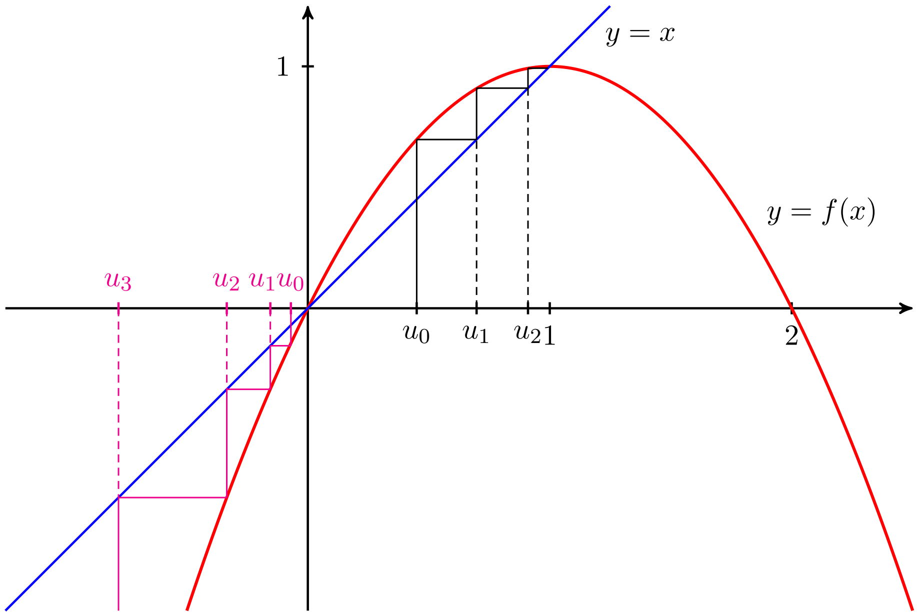
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (a\, u_n + b) - (a\,\ell + b) = a(u_n - \ell) = a\, v_n.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n = a^{n-n_0}\, v_{n_0} = a^{n-n_0}\,(u_{n_0} - \ell)$, puis

$$u_n = \ell + a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) = \frac{b}{1-a} + a^{n-n_0}\left(u_{n_0} - \frac{b}{1-a}\right).$$

Exemple – Étudions la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$.

Posons, pour tout x réel, $f(x) = x(2-x)$; la situation peut être représentée sur le graphique ci-dessous, où l'on a représenté le comportement de (u_n) pour deux choix de valeurs initiales u_0.



La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, en particulier, quel que soit u_0, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit bien (u_n). De plus f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Premier cas : $u_0 = 0$, $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$. On remarque que $f(0) = f(2) = 0$. En particulier si $u_0 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout n par une récurrence immédiate. Si $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0$ puis $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Enfin on remarque que $f(1) = 1$ donc, si $u_0 = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Limites possibles : si (u_n) converge vers un certain réel ℓ, alors d'après la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et par continuité de f, on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell - \ell^2 = 0$, *i.e.* $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Deuxième cas : $u_0 \in I_0 =]-\infty,0[$. L'intervalle I_0 est stable par f car f est strictement croissante sur I_0 avec $f(0) = 0$. Par récurrence, on montre alors que $u_n \in I_0$ pour tout n. Pour tout $x \in I_0$, $f(x) \leqslant x$ car $x - x^2 \leqslant 0$. En particulier, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$, donc (u_n) est décroissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ devrait vérifier $\ell \leqslant u_0 < 0$, ce qui contredit le fait que $\ell = 0$ ou 1. Donc $u_n \to -\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Troisième cas : $u_0 \in I_1 =]0,1]$. L'intervalle I_1 est stable par f car f est strictement croissante sur I_1 avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour tout $x \in I_1$, $f(x) \geqslant x$ car $x - x^2 = x(1-x) \geqslant 0$. On en déduit que (u_n) est à valeurs dans I_1 et qu'elle est croissante. Elle est donc convergente, et sa limite ℓ vérifie $\ell \in I_1$ par croissance de (u_n). Sachant que $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, on a finalement $\ell = 1$: (u_n) converge vers 1.

Cas particulier du précédent : $u_0 \in I_2 = [3/4,1]$. La fonction f est continue et croissante sur $]-\infty,1]$, donc
$$f(I_2) = [f(3/4),f(1)] = [15/16,1] \subset I_2.$$
De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $|f'(x)| = 2(1-x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in I_2$. La fonction f est donc $1/2$-contractante sur I_2.

Si $u_0 \in I_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_2$ car I_2 est stable par f, et
$$|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$
On montre alors par récurrence sur n que $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - 1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On retrouve, par encadrement, le fait que dans ce cas, $u_n \to 1$, car $1/2^n \to 0$. Mais on a de plus une estimation de la vitesse de convergence. D'ailleurs, dans le cas où $u_0 \in I_0 =]0,1]$, on a montré que (u_n) converge vers 1 en croissant. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [3/4,1]$. L'estimation de la vitesse de convergence s'applique à partir de n_0.

Autres cas : si $u_0 \in [1,2[$, alors $u_1 \in]0,1] = I_1$ et, à un décalage d'indice près, on est dans la situation du troisième cas, donc $u_n \to 1$. Si $u_0 > 2$, alors $u_1 \in]-\infty,0[= I_0$ et, à un décalage d'indice près, on est dans la situation du deuxième cas, donc $u_n \to -\infty$.

III. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les raisonnements de cette partie utilisent des notions d'algèbre linéaire, vues en première année et qui seront rappelées en détails dans le chapitre **Espaces vectoriels et applications linéaires**.

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On cherche à déterminer l'ensemble noté $\mathcal{S}_{a,b}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Première formulation : soit $F : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie très facilement que $F \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$, et on cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $F(u) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$, *i.e.* $\mathcal{S}_{a,b} = \mathrm{Ker}(F)$. En particulier, $\mathcal{S}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Deuxième formulation : soit $\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_{a,b} & \to & \mathbb{K}^2 \\ u = (u_n) & \mapsto & (u_0,u_1) \end{array} \right.$

En imposant les conditions initiales $u_0 = x$ et $u_1 = y$, le problème revient à déterminer l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}_{a,b}$ tels que $\phi(u) = (x,y)$.

Théorème

L'application ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{a,b}$ sur $\mathbb{K}^2$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}_{a,b}) = 2$.

Démonstration – Tout d'abord, ϕ est linéaire : soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites et λ un scalaire. Alors

$$\begin{aligned} \phi(\lambda u + v) &= (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) \\ &= \lambda(u_0,u_1) + (v_0,v_1) \\ &= \lambda\phi(u) + \phi(v). \end{aligned}$$

La bijectivité de ϕ se traduit ainsi : pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique suite vérifiant la relation de récurrence d'ordre 2, et dont les deux premiers termes sont respectivement x et y. Or, les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = x,\, u_1 = y \end{array} \right.$$

définissent entièrement et de façon unique la suite (u_n) : ϕ est donc un isomorphisme. □

Reste à savoir comment déterminer explicitement une suite (u_n) de $\mathcal{S}_{a,b}$ en fonction de ses deux premiers termes.

Propriété

Pour $r \in \mathbb{K}$, la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$ si et seulement si r est une solution de **l'équation caractéristique** associée :

$$x^2 + ax + b = 0. \qquad (\mathcal{E})$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$. Avec $n = 0$, on obtient $r^2 + ar + b = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $r^2 + ar + b = 0$, en multipliant cette égalité par r^n, on obtient $r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$. $\square$

Théorème

On suppose $(a,b) \neq (0,0)$.

• Si $(\mathcal{E})$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors les suites $((r_1)^n)$ et $((r_2)^n)$ forment une base de $\mathcal{S}_{a,b}$.

Pour tout $(u_n) \in \mathcal{S}_{a,b}$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n.$$

• Si $(\mathcal{E})$ admet une racine double r dans $\mathbb{K}$, alors les suites (r^n) et (nr^n) forment une base de $\mathcal{S}_{a,b}$.

Pour tout $(u_n) \in \mathcal{S}_{a,b}$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda r^n + \mu\, nr^n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $(\mathcal{E})$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes $z = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{z}$, alors les suites $(\rho^n \cos(n\theta))$ et $(\rho^n \sin(n\theta))$ forment une base de $\mathcal{S}_{a,b}$.

Pour tout $(u_n) \in \mathcal{S}_{a,b}$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda\,\rho^n \cos(n\theta) + \mu\,\rho^n \sin(n\theta) = \rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)).$$

Démonstration

• On sait que $((r_1)^n)$ et $((r_2)^n)$ appartiennent à $\mathcal{S}_{a,b}$ d'après la propriété précédente. De plus, $\mathcal{S}_{a,b}$ est de dimension 2. Il suffit donc de montrer que $((r_1)^n)$ et $((r_2)^n)$ sont indépendantes. Supposons qu'il existe deux scalaires λ et μ tels que $\lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n = 0$ pour tout n. On en déduit en particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, que (λ,μ) est solution du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ \lambda r_1 & + & \mu r_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Or, r_1 et r_2 étant distinctes, ce système est de rang 2, et son unique solution est $(0,0)$. Donc $\lambda = \mu = 0$.

• On procède de la même façon lorsque $(\mathcal{E})$ possède une racine double r. Il suffit de remarquer que la suite (nr^n) appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$ car, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}(n+2)r^{n+2} = (n+2)r^n \times [-(ar+b)] &= -a(n+2)r^{n+1} - b(n+2)r^n \\ &= -a(n+1)r^{n+1} - b\,nr^n - (ar+2b)r^n.\end{aligned}$$

Or, r étant racine double du polynôme $X^2 + aX + b$, on a

$$X^2 + aX + b = (X - r)^2 = X^2 - 2rX + r^2.$$

On en déduit que $a = -2r$ et $b = r^2$, d'où $ar + 2b = 0$. Ainsi (nr^n) vérifie la relation de récurrence d'ordre 2. La liberté de la famille se prouve comme dans le point précédent (elle est même plus simple, il suffit de remarquer que $r \neq 0$ car $(a,b) \neq (0,0)$).

• Enfin, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $(\mathcal{E})$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes $z = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, on sait d'après le premier point que (z^n) et $(\bar{z}^n)$ forment une base de $\mathcal{S}_{a,b}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il suffit de remarquer que

$$\rho^n \cos(n\theta) = \mathcal{R}e(z^n) = \frac{1}{2}(z^n + \bar{z}^n),$$

et donc $(\rho^n \cos(n\theta))$ appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$ comme combinaison linéaire de (z^n) et $(\bar{z}^n)$. De même,

$$\rho^n \sin(n\theta) = \mathcal{I}m(z^n) = \frac{1}{2i}(z^n - \bar{z}^n),$$

et donc $(\rho^n \sin(n\theta))$ appartient à $\mathcal{S}_{a,b}$ comme combinaison linéaire (dans $\mathbb{C}$, même si cette suite est réelle) de (z^n) et $(\bar{z}^n)$. La liberté de la famille se prouve à nouveau comme dans le premier point, en remarquant que $\rho \neq 0$ et $\sin(\theta) \neq 0$ car z est complexe non réel. □

Méthode – Pour déterminer explicitement λ et μ, qui sont les coordonnées de (u_n) sur la base que l'on vient d'expliciter (selon les cas), on procède en considérant les deux premiers termes.

Par exemple, dans le premier cas, pour trouver λ et μ tels que $u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda\, r_1 & + & \mu\, r_2 & = & u_1 \end{array}\right.$$

correspondant à $n = 0$ et $n = 1$.

Dans le second cas, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda\, r & + & \mu\, r & = & u_1 \end{array}\right.$$

et dans le troisième,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda\, \rho\cos(\theta) & + & \mu\, \rho\sin(\theta) & = & u_1. \end{array}\right.$$

Dans tous les cas, le système à résoudre est de rang 2.

Exemple – Déterminons explicitement la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique associée à cette suite suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$X^2 = X + 1$$

qui possède deux racines distinctes,

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On sait donc qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n.$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} \lambda + \ \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \ \mu = 0 \\ \lambda r_1 - \lambda r_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \ \mu = 0 \\ \lambda = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

La suite (u_n) est appelée suite de Fibonacci. Le réel $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.