Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle J et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in J$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Si elle converge, on peut noter sa limite $f(x)$. Quelles sont alors les propriétés de la fonction f :

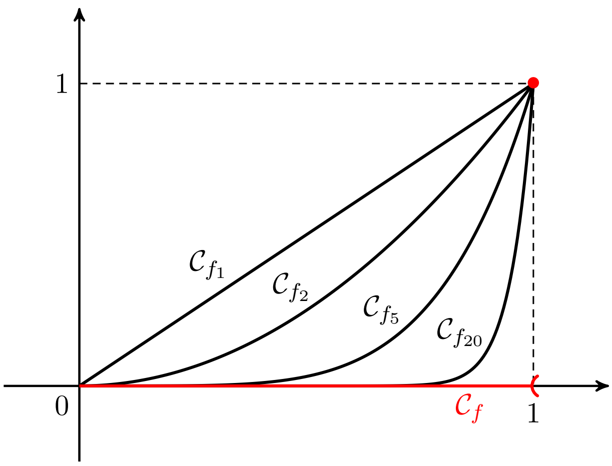
- Si f_n est continue ou même dérivable pour tout n, f est-elle continue, dérivable ?
- Peut-on exprimer l'intégrale de f sur un segment comme limite des intégrales des f_n ?

On remarque tout de suite que la question n'est pas anodine, en considérant la suite de fonctions (f_n) où $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel. Alors bien sûr, toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pourtant,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ +\infty & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite si $x \leqslant -1$. La fonction limite f est définie sur $]-1,1]$, et elle n'est pas continue.

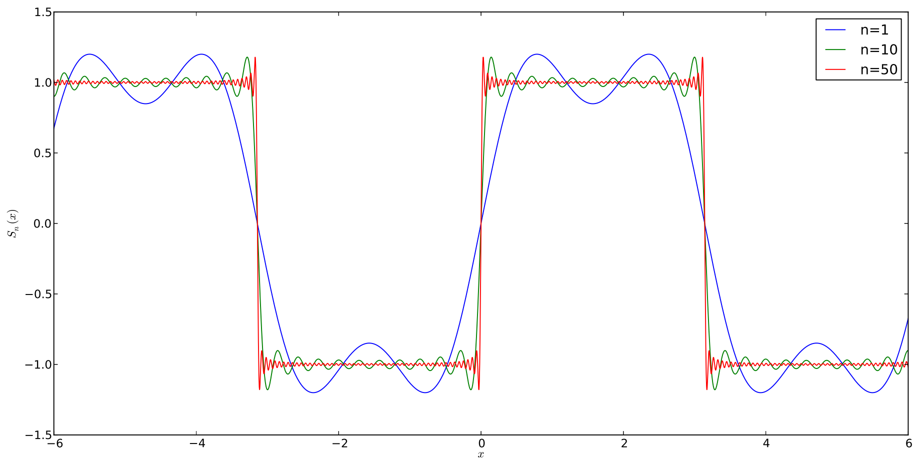
On a représenté ci-dessous f_1, f_2, f_5 et f_{20} (en noir), et la fonction f (en rouge), sur $[0,1]$.



De, même, pour chaque x on peut s'intéresser à la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$. Quelle sont les propriétés de la fonction-somme ainsi définie ?

Par exemple, ci-dessous, on a représenté, pour différentes valeurs de n,

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$



On voit que, lorsque n augmente, le graphe de S_n semble « tendre » vers un créneau. Les séries de fonctions interviennent notamment en théorie du signal.

I. Différents modes de convergence

1. Convergence simple, convergence uniforme

Commençons par définir la convergence envisagée dans l'introduction :

Définition – Convergence simple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$), on se donne une fonction $f_n : I \to \mathbb{K}$.
On se donne également une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f sur I si :

$$\forall\, x \in I, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Exemple – Comme nous l'avons montré dans l'introduction, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ converge vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sur $]-1,1]$.

La convergence simple est donc une notion qui s'applique « x par x ». Pour la montrer, on commence par fixer x et on étudie la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Or, le comportement de cette suite pour un certain x peut être indépendant du comportement pour un autre x, même proche. C'est ce qui arrive dans notre exemple entre $x \in]-1,1[$ et $x = 1$.

Pour pallier cette difficulté, on va définir un autre mode de convergence en imposant une certaine uniformité entre les différentes valeurs de x :

Définition – Convergence uniforme

Avec les notations ci-dessus, on dit que (f_n) converge **uniformément** vers f sur I si

- pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $f_n - f$ est bornée sur I ;
- $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Traduisons cette définition avec des quantificateurs ; elle signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Comparons-la à la convergence simple ; cette dernière signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

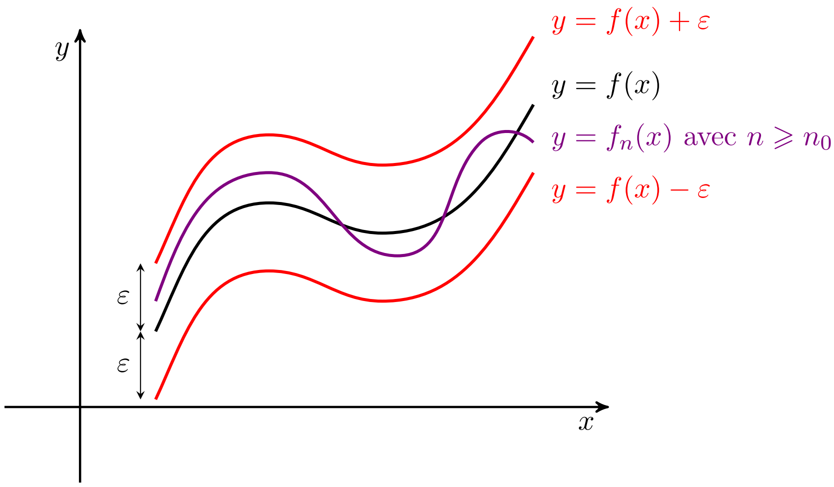
Toute la différence réside dans cet échange de quantificateurs : dans la convergence simple, le rang n_0 dépend de x ; dans la convergence uniforme, le même n_0 doit convenir pour tout $x \in I$. La convergence uniforme est donc beaucoup plus exigeante que la convergence simple.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ est équivalente à $f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Ainsi, pour que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, pour tout $x \in I$,

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon,$$

ce qui signifie que pour $n \geqslant n_0$, le graphe de f_n est inclus dans le « tube » d'épaisseur 2ε autour du graphe de f.

Ce phénomène est illustré sur le graphique suivant :



Propriété

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

Pour que (f_n) converge uniformément vers f sur I, il faut et il suffit qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que

- pour n assez grand, pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$;
- $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Il suffit de choisir $a_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ si $f_n - f$ est bornée (ce qui est le cas pour n assez grand), $a_n = 0$ sinon.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si une telle suite (a_n) existe, alors pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $f_n - f$ est bornée et

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \quad \text{avec} \quad a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc (f_n) converge uniformément vers f sur I. $\square$

L'intérêt de cette propriété est de montrer que pour prouver la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I, il n'est pas nécessaire de *calculer* $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, mais il suffit de le *majorer* par un terme a_n convenable.

En revanche, si les majorations ne sont pas assez fines, il se peut que l'on ne puisse pas conclure. Il faut alors améliorer les majorations, sachant que la majoration la plus fine possible sera toujours celle donnée par le calcul de $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, qui peut se faire par des études de fonctions.

Pour prouver que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I, on peut essayer de calculer $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, ou le minorer par une quantité positive qui ne tend pas vers 0 lorsque $n\to+\infty$.

Remarque – Supposons que toutes les fonctions avec lesquelles on travaille soient bornées, c'est-à-dire, appartiennent à $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$. Sur cet espace, on a défini dans le chapitre **Espaces vectoriels normés** la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors, par définition même, (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si

$$\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

C'est pourquoi la norme infini sur $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ est appelée **norme de la convergence uniforme**. □

Revenons à nouveau sur l'exemple de la suite des fonctions $f_n : x\mapsto x^n$. Il y a convergence simple vers la fonction f notamment sur $[0,1[$ (sur lequel f coincide avec la fonction nulle). Il n'y a pas convergence uniforme sur cet intervalle car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x\in[0,1[}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1.$$

Cela dit, on a l'impression que l'absence de convergence uniforme sur $[0,1[$ provient du voisinage de 1. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $[0,1[$. Alors

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} x^n = b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ ;$$

il y a donc convergence uniforme sur $[a,b]$.

En généralisant cette idée, on est amené à définir un troisième mode de convergence :

Définition – Convergence uniforme sur tout segment

Avec les notations précédentes, on dit que (f_n) converge **uniformément sur tout segment** de I vers f si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, (f_n) converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$.

Remarque – Ce mode de convergence permet parfois d'effacer les difficultés provenant des extrémités de l'intervalle I, lorsque celui-ci est ouvert ou semi-ouvert, comme c'est le cas dans l'exemple précédent.

Propriété – Lien entre les différentes convergences

On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} & (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \\ \Rightarrow\ & (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment de } I \\ \Rightarrow\ & (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I. \end{aligned}$$

Les deux réciproques sont fausses.

Démonstration

• Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si J est un segment inclus dans I, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x\in J}|f_n(x)-f(x)| \leqslant \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \quad \text{avec} \quad \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc (f_n) converge uniformément vers f sur J, et ce quel que soit J. Ainsi (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

• Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors pour tout $x \in I$, il existe un segment J inclus dans I qui contient x, et alors, pour n assez grand,

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \sup_{y\in J}|f_n(y)-f(y)| \quad \text{avec} \quad \sup_{y\in J}|f_n(y)-f(y)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi (f_n) converge simplement vers f sur I.

• L'exemple des fonctions $x \mapsto x^n$ sur $[0,1[$ montre que la première réciproque est fausse. Le même exemple sur $[0,1]$ montre que la deuxième réciproque est fausse. $\square$

Remarque – Dans certains cas, prouver la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I revient à la prouver pour des segments d'une forme particulière, plus simple :

• Si I est de la forme $[\alpha,\beta[$, on peut se limiter aux segments de la forme $[\alpha,b]$ où $b \in I$ (de même si $I =]\alpha,\beta]$ avec les segments de la forme $[a,\beta]$ où $a \in I$).

• Si I est symétrique par rapport à 0, de la forme $]-\alpha,\alpha[$, on peut se limiter aux segments de la forme $[-a,a]$ où $a \in [0,\alpha[$.

En effet, dans chaque cas, tout segment de I est inclus dans un segment de la forme particulière indiquée.

Méthode – Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on procède souvent comme suit :

• On fixe x et on étudie la convergence de la suite de scalaires $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On note $f(x)$ sa limite, où x appartient à un certain intervalle I (qui n'est pas nécessairement l'ensemble de définition des f_n) : la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I.

• On se demande alors si la convergence est meilleure. Si elle est uniforme, ou au moins uniforme sur tout segment de I, on sait que la limite ne peut être que f. On essaie donc de majorer $|f_n(x)-f(x)|$, et plus précisément, de prouver, pour $x \in I$ et n assez grand, une inégalité du type

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant a_n$$

où a_n est **indépendant** de x, et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Si l'on y parvient sur I tout entier, alors la convergence est uniforme sur I.
- Sinon, on essaie de le faire sur tout segment inclus dans I. Si l'on y parvient, la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Exemples

• Étudions la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$, pour $n \geqslant 1$, sur $\mathbb{R}$. Il est évident que (f_n) converge simplement vers la fonction valeur absolue (notée f) sur $\mathbb{R}$, car pour tout réel x,

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x^2} = |x|.$$

On se demande si cette convergence est uniforme. Or, pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant f_n(x)-f(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|} \leqslant \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'encadrement est indépendant de x. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$. Ce résultat montre au passage que l'on peut approcher la valeur absolue (non dérivable en 0) par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, de façon uniforme sur $\mathbb{R}$ et arbitrairement précise.

• Considérons la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \arctan(nx)$ définies sur $\mathbb{R}$; elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par $f(0) = 0$, $f(x) = -\pi/2$ si $x < 0$ et $f(x) = \pi/2$ si $x > 0$. Cette convergence n'est pas uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ car, par exemple,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2},$$

comme le montre une étude de fonctions sans difficulté.

• Étudions la suite des fonctions $f_n : x \mapsto nx^n(1-x)$, pour $n \geqslant 1$, sur $[0,1]$. Par croissances comparées, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle f sur $[0,1[$, et $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a donc convergence simple vers f sur $[0,1]$. Pour savoir si cette convergence est uniforme, étudions la fonction $f_n - f = f_n$ sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = n^2x^{n-1}(1-x) - nx^n = nx^{n-1}(n(1-x) - x) = nx^{n-1}(n - (n+1)x).$$

On en déduit immédiatement que f_n, qui est positive, admet un maximum global sur $[0,1]$ en $\dfrac{n}{n+1}$. Or

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \sim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Un développement limité classique montre que

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Finalement, f et toutes les fonctions f_n sont bornées sur $[0,1]$, et

$$\|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$. Elle est cependant uniforme sur tout segment de la forme $[0,a]$ avec $0 \leqslant a < 1$ (et donc sur tout segment de $[0,1[$). En effet, pour tout n tel que $a < \dfrac{n}{n+1}$ (ce qui est le cas pour n assez grand car $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$), on a

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = na^n(1-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Le cas des séries de fonctions

Bien sûr, on définit la convergence (simple ou uniforme) d'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ comme la convergence de la suite des sommes partielles

$$(S_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{p} f_n\right)_{p\in\mathbb{N}}$$

On se ramène ainsi à une suite de fonctions.

Exemples de convergence simple

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$. La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est appelée fonction ζ de Riemann, elle est définie sur $]1, +\infty[$.
• Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1,1[$. La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

□

Traduisons plus particulièrement la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$. Supposons que la fonction somme S soit définie sur I. Pour tout $x \in I$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$S(x) - S_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{p} f_n(x) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) = R_p(x);$$

R_p est le reste d'ordre p de cette série de fonctions.

Ainsi, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I.
- La suite $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur I.
- Pour p assez grand, R_p est borné sur I et

$$\sup_{x\in I} |R_p(x)| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i.e. \quad \sup_{x\in I} \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Convergence normale des séries de fonctions

Nous allons chercher une condition suffisante simple pour que toutes ces propriétés soient satisfaites. Supposons que f_n soit bornée sur I pour tout n. Pour tout $x \in I$,

$$|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty.$$

Supposons que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$$

converge (la norme infini étant calculée sur I). Alors, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument, et donc converge, pour tout $x \in I$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge donc simplement sur I. Pour tout $x \in I$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q > p$, on a de plus

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} \|f_n\|_\infty.$$

Lorsque q tend vers $+\infty$, on obtient en particulier, pour tout $x \in I$, et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|R_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \quad \text{avec} \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous avons majoré le reste d'ordre p de la série par une quantité qui tend vers 0, indépendante de x : la convergence est donc uniforme sur I.

On définit ainsi un nouveau mode de convergence spécifique aux **séries** de fonctions :

Définition – Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ (où f_n est définie sur I pour tout n) converge **normalement** sur I si :

- f_n est bornée sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

On définit également la convergence normale sur tout segment de I.

En pratique, la convergence normale se montre souvent de la façon suivante :

Propriété

Pour que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I, il faut et il suffit qu'il existe une suite (α_n) de réels positifs telle que

- Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Il suffit de choisir $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si une telle suite (α_n) existe, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ entraîne la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$. □

Remarque – Ainsi, pour prouver la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, il n'est pas nécessaire de *calculer* $\|f_n\|_\infty$, mais il suffit de *majorer* $\|f_n\|_\infty$ par un terme α_n convenable.
Pour prouver l'absence de convergence normale, on peut calculer $\|f_n\|_\infty$ ou le minorer par le terme général positif d'une série divergente.

Exemple – Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2};$$

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, car pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Propriété

Si $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I, alors :

- Elle converge uniformément sur I.
- Elle converge normalement sur tout segment de I.

Démonstration – La première implication a été démontrée ci-dessus. La seconde vient du fait que la norme infini de f_n sur un segment de I est inférieure ou égale à sa norme infini sur I. Le théorème de comparaison de séries à termes positifs donne alors le résultat. □

Exemples

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$; $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$ car

$$\sup_{x>1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n},$$

or la série harmonique diverge. En revanche, $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 1$. En effet, dans ce cas,

$$\sup_{x \geqslant a} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a},$$

et la série $\sum_{n \geqslant 1} 1/n^a$ converge car $a > 1$. Ceci montre d'ailleurs que la convergence normale sur tout segment de I n'entraîne pas la convergence normale sur I.

• On montre de même que la série géométrique, $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ où $f_n : x \mapsto x^n$, ne converge pas normalement sur $]-1{,}1[$, mais converge normalement sur tout segment de $]-1{,}1[$.

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n};$$

la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$, car par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in [1,2]} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{1+n},$$

or la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{1+n}$ diverge (série harmonique).

Pourtant, $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$: on remarque en effet que pour tout $x > 0$, la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

est une série alternée de réels, dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0. Elle est donc convergente et, pour tout $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a la majoration suivante de la somme et des restes :

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right| \leqslant \frac{1}{x+p+1} \leqslant \frac{1}{p+1}.$$

Ce majorant tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, et est indépendant de x, d'où la conclusion.

Méthode – Pour étudier la convergence d'une série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, on procède souvent comme suit :

• On fixe x et on étudie la convergence de la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$.
On note $S(x)$ sa somme, où x appartient à un certain intervalle I : la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I (vers S).

On se demande alors si la convergence est meilleure.

• On essaie de majorer, pour $x \in I$, le module du reste d'ordre p,

$$|S(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right|$$

par une quantité **indépendante** de x, qui converge vers 0 lorsque $p \to +\infty$.

- Si l'on y parvient sur I tout entier, alors la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ est uniforme sur I.
- Sinon, on essaie de le faire sur tout segment inclus dans I. Si l'on y parvient, la convergence est uniforme sur tout segment de I.

- On essaie de majorer, pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)|$ par un terme α_n **indépendant** de x, et tel que $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.
  - Si l'on y parvient sur I tout entier, alors la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est normale sur I.
  - Sinon, on essaie de le faire sur tout segment inclus dans I. Si l'on y parvient, la convergence est normale sur tout segment de I.

Si l'une de ces deux situations a lieu, la convergence est en particulier uniforme (sur I ou sur tout segment de I selon le cas) et donc simple sur I. On peut donc directement commencer par la convergence normale si on a l'intuition que cela va aboutir, et si c'est le cas, cela remplace les deux premiers points. Sinon, on essaie de vérifier le premier voire les deux premiers points. □

Nous sommes maintenant prêts à examiner la question de la régularité, de la dérivation et de l'intégration des suites et séries de fonctions. Si (f_n) est une suite de fonctions définies sur I, qui converge (en un certain sens) sur I vers une fonction f, à quelles conditions peut-on écrire :

- $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$,
- $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx, \quad i.e. \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$,
- $\displaystyle (f_n)' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f', \quad i.e. \quad \lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$?

On imagine désormais facilement que la validité de ces égalités dépend notamment du mode de convergence de la suite (f_n) vers sa limite. On remarque aussi que chacune de ces égalités revient à intervertir une limite selon n avec, soit une limite selon x, soit une intégrale, soit l'opérateur de dérivation. On fait donc souvent référence à ces théorèmes que nous allons étudier, comme théorèmes d'interversion.

II. Limite et continuité des suites et séries de fonctions

1. Théorèmes de continuité

Théorème – Continuité pour les suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I,
- (f_n) converge **uniformément** sur I, ou **uniformément sur tout segment de** I, vers une fonction f.

Alors f est continue sur I.

Démonstration – Il suffit de faire la démonstration sous l'hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $a \in I$. Pour $\eta > 0$ assez petit, $J = I \cap [a-\eta, a+\eta]$ est un segment de I. Pour tout $x \in J$, on a

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Par convergence uniforme de (f_n) vers f sur J, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $x \in J$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction f_{n_0} étant continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x-a| \leqslant \delta$, on ait $x \in J$ et $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \varepsilon$. Dans ces conditions, on a $|f(x) - f(a)| \leqslant 3\varepsilon$, d'où la continuité de f en a, et ce pour tout $a \in I$. Donc f est continue sur I. □

Remarque – Ce théorème donne aussi un moyen efficace pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément : par contraposition, on en déduit en effet que, si la limite simple de la suite (f_n) n'est pas continue en un point a de I alors que chacune des fonctions f_n est continue sur I, alors la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur I, ni uniforme sur tout segment de I. Cet argument s'applique par exemple à la suite des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$, avec $a = 1$.

Pour les séries de fonctions, ce théorème prend la forme suivante :

Théorème – Continuité pour les séries de fonctions

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge **uniformément** sur I, ou **uniformément sur tout segment de** I.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exemple – La fonction ζ de Riemann $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

En effet, la série de fonctions associée converge normalement sur tout segment (et donc uniformément sur tout segment) de $]1, +\infty[$ et pour tout n, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Passages à la limite

Théorème de la double limite (admis : démonstration hors programme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I, et a une extrémité de I, éventuellement infinie. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite finie ℓ_n en a,
- (f_n) converge **uniformément** sur I vers une fonction f.

Alors :

- La suite (ℓ_n) converge,
- La fonction f possède une limite en a, et $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$, *i.e.*

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Pour les séries de fonctions, ce théorème prend la forme suivante :

Théorème – Interversion limite/somme (admis : démonstration hors programme)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I, éventuellement infinie. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite finie ℓ_n en a.
- $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge **uniformément** sur I.

Alors :

- La série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge,
- La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ possède une limite en a, et $\displaystyle\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, *i.e.*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Exemple – Dans le cas de la fonction ζ de Riemann, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

En effet, la série de fonctions associée converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$, donc par exemple sur $[2,+\infty[$ dont $+\infty$ est une extrémité, et $x\mapsto 1/n^x$ a pour limite 0 en $+\infty$ si $n\geqslant 2$, et 1 si $n=1$.

Attention !

• Une convergence uniforme sur tout segment de I **ne suffit pas** pour appliquer ce théorème. Pour illustrer ceci, donnons l'exemple de la série géométrique. La série de fonctions associée converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment de $]-1,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$. Pourtant, la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge.

• Ce résultat ne porte que sur des limites finies. Par exemple, il ne s'applique donc pas lorsque $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout n.

III. Intégration des suites et séries de fonctions

Théorème – Interversion limite/intégrale

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$. On suppose que :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$,
- (f_n) converge **uniformément** sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Alors

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

Démonstration – On sait que la fonction f, en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues, est continue sur $[a,b]$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \|f_n-f\|_\infty\,dx = (b-a)\|f_n-f\|_\infty.$$

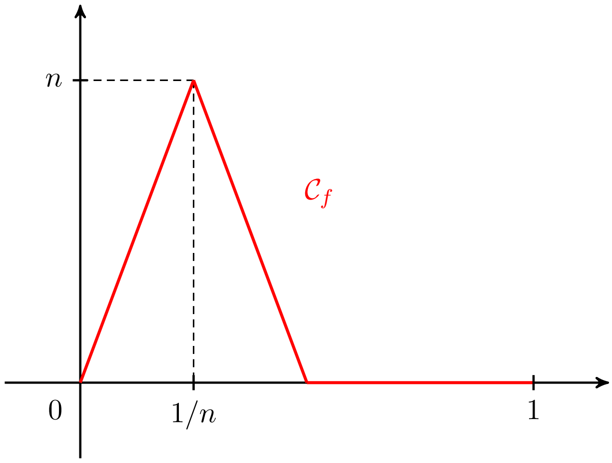
Par convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[a,b]$, $\|f_n-f\|_\infty\to 0$, et donc

$$\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat par linéarité de l'intégrale. □

Contre-exemple – La conclusion est fausse en général sous l'hypothèse de convergence simple, comme le montre l'exemple de la suite des fonctions f_n définies sur [0,1], pour $n \geqslant 2$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ -n^2(x - \frac{1}{n}) + n & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



On montre facilement que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur [0,1], et pourtant, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1.$$

On ne peut donc pas intervertir limite et intégrale dans ce cas.

Pour les séries de fonctions, on obtient :

Théorème – Intégration terme à terme des séries de fonctions

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a,b]$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$,
- $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge **uniformément** sur $[a,b]$.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n(x)\, dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Exemple – On veut prouver la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}(e^{-n} - e^{-2n}).$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}(e^{-n} - e^{-2n}) = \int_1^2 e^{-nx}\, dx.$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-nx}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur [1,2]. De plus, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (et en particulier uniformément) sur [1,2] car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1,2]$,

$$0 \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-n},$$

la série $\sum_{n\geqslant 1} e^{-n}$, indépendante de x, étant convergente (série géométrique de raison $1/e$ avec $|1/e| < 1$). D'après le théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_1^2 e^{-nx}\, dx$ converge

et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^2 e^{-nx}\,dx = \int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \right) dx.$$
Or, pour tout $x \in [1,2]$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$
(somme d'une série géométrique de raison e^{-x} avec $|e^{-x}| < 1$). On vient donc de montrer la convergence de la série étudiée, avec
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(e^{-n} - e^{-2n}) = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \left[\ln(1-e^{-x})\right]_1^2 = \ln(1+e) - 1$$
après simplifications. Finalement :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(e^{-n} - e^{-2n}) = \ln(1+e) - 1.$$
Le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer des sommes de séries non triviales.

Remarque – On peut montrer (également par intégration terme à terme par exemple) que pour tout $x \in \,]-1,1[$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
Cela permet de retrouver le résultat ci-dessus (en utilisant cette égalité avec $x = 1/e$ et $x = 1/e^2$).

IV. Dérivation des suites et séries de fonctions

1. Théorèmes sur la classe $\mathcal{C}^1$

La convergence uniforme semble un mode de convergence efficace qui permet de conserver les propriétés des fonctions f_n. Pourtant, elle ne suffit pas dès lors que l'on souhaite dériver une limite de suite ou série de fonctions. En effet, la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$, converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas dérivable en 0.

Théorème – Classe $\mathcal{C}^1$ pour les suites de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I,
- (f_n') converge **uniformément** sur I, ou **uniformément sur tout segment** de I, vers une fonction g.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Démonstration – Fixons $a \in I$. Pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt,$$
car f_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Or, (f_n) converge simplement vers f sur I, donc
$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{et} \quad f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

De plus, g étant limite uniforme sur tout segment de la suite de fonctions continues (f_n'), d'après le théorème d'interversion limite/intégrale, on a, pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^x g(t)\,dt.$$

Finalement, lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Ceci entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$. $\square$

Remarque – L'hypothèse forte du théorème porte sur les dérivées des f_n, et pas sur les fonctions elles-mêmes. Il est indispensable de prouver la convergence uniforme sur tout segment pour (f_n'), mais il est inutile de prouver la convergence uniforme de (f_n) : une convergence simple suffit.

Pour les séries, on a le résultat suivant :

Théorème – Dérivation terme à terme des séries de fonctions

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge **simplement** sur I.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge **uniformément** sur I, ou **uniformément sur tout segment** de I.

Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exemples

• Complétons l'étude de la fonction ζ de Riemann : la convergence simple de la série a été établie plus haut (on a même montré une convergence normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$). Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$,

$$f_n'(x) = -\ln(n)\,\exp(-x\ln(n)) = -\frac{\ln(n)}{n^x}.$$

Montrons que la série des dérivées converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Pour tout $x \geqslant a$, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{-\ln(n)}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a}.$$

Il suffit donc d'établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$. Or, en fixant $\delta \in]1,a[$, on a

$$n^\delta \frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{a-\delta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées, car $a - \delta > 0$. Ainsi

$$\frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\delta}$ converge car $\delta > 1$. Par comparaison, on obtient le résultat.

Finalement, on a montré que la fonction ζ de Riemann est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ avec, pour tout $x > 1$,

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

En particulier, ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

- Considérons la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$,

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leqslant |x|^n.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $|x| \in [0, 1[$), donc par comparaison, la série converge simplement sur $]-1,1[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = (-1)^n x^{2n}$. Soit $a \in [0, 1[$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|f_n'(x)| \leqslant a^{2n}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison a^2 avec $|a^2| < 1$). Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]-1, 1[$.
D'après le théorème de dérivation terme à terme, on sait donc que la fonction somme

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On reconnaît la dérivée de la fonction arctan. Sachant que l'on travaille sur un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x) + k.$$

En évaluant cette relation en $x = 0$, on obtient $k = 0$. On a donc montré que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On remarque que les premiers termes de la somme forment les développements limités de arctan en 0. L'égalité précédente s'appelle un développement en série entière de la fonction arctan sur $]-1,1[$ (voir le chapitre **Séries entières**).

2. Théorèmes sur la classe $\mathcal{C}^k$

Pour la classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 2$), on peut bien sûr raisonner par récurrence à partir des théorèmes de la classe $\mathcal{C}^1$. On admettra que cela conduit aux théorèmes suivants, que l'on pourra appliquer directement :

Théorème – Classe $\mathcal{C}^k$ pour les suites de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers une fonction f sur I,
- Pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$, $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers une fonction g_j sur I,
- $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément sur tout segment** de I vers une fonction g_k.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $f^{(j)} = g_j$.

Théorème – Classe $\mathcal{C}^k$ pour les séries de fonctions

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge **simplement** sur I,
- Pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$, $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I.
- $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge **uniformément sur tout segment** de I.

Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}.$$