Séries Numériques.
Exercices 2017-2018.

Niveau 1.
Séries télescopiques.

1. Etudier la nature de la série $\sum\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

2. Pour : $x \in]-1,+1[$, et : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{x^n}{(1-x^n).(1-x^{n+1})}$.

   a. Montrer que $(1-x).u_n$ peut se mettre sous la forme du terme général d'une série télescopique.

   b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et préciser sa somme.

3. A l'aide d'une série télescopique, montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4. Pour : $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, on pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n.(n+1)...(n+m)}$.

   Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et calculer sa somme.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

5. Utilisation d'équivalents et de développements limités.
   Préciser la nature des séries suivantes en indiquant à partir de quel terme sont définies ces séries.
   - $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$,
   - $\sum \dfrac{ch(n)}{ch(2.n)}$,
   - $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
   - $\sum \left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

6. Etudier la convergence des séries suivantes :
   - $\sum n^2.e^{-\sqrt{n}}$,
   - $\sum \dfrac{n!}{\ln(n).e^{2.n}}$,
   - $\sum \dfrac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$.

7. On pose : $u_n = \dfrac{n!.e^n}{n^n}.n^{\alpha}$, où : $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   a. A l'aide d'un développement limité, étudier la nature de la série $\sum v_n$ selon la valeur de α.

   b. En déduire, pour une valeur de α bien choisie, un équivalent de n! en $+\infty$ (avec une constante dont on ne cherchera pas la valeur) soit le début de la formule de Stirling.

8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries à termes réels strictement positifs convergentes.
   Montrer à l'aide de majorations que les séries dont les termes généraux sont donnés ci-dessous sont encore convergentes :
   - $\max(u_n, v_n)$,
   - $\sqrt{u_n.v_n}$,
   - $\dfrac{u_n.v_n}{u_n+v_n}$.

9. Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

   a. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge aussi.

   b. Montrer qu'on peut exprimer u_n à l'aide de v_n pour tout n, et en déduire que la réciproque de l'implication précédente.

10. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes strictement positifs et convergente.

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n^{1+\frac{1}{n}}$?

11. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})}$.

a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1-\sqrt{n}.u_n$.

b. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

c. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

d. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

12. Soit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.

a. Justifier l'existence de R_n, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. A l'aide de séries géométriques, montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \leq \dfrac{1}{n.n!}$.

Séries de signe quelconque, sommes de séries.

13. Quelle est la nature d'une série dont le terme général est la somme des termes généraux d'une série absolument convergente et d'une série semi-convergente ?

14. On admet que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer la convergence des séries suivantes, puis à l'aide de somme partielles, calculer leur somme.

- $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2.n+1)^2}$,
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

15. On admet que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

Montrer la convergence des séries suivantes, puis en transformant le terme général, calculer leur somme.

- $\sum \dfrac{n^2}{n!}$,
- $\sum \dfrac{n^3-n}{n!}$.

16. A l'aide de séries géométriques, étudier la convergence et la somme éventuelle des séries suivantes :

- $\sum 2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\dfrac{n.\pi}{4}\right).x^n$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\sum x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

17. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sin(\pi.(2+\sqrt{3})^n)$.

   a. Montrer à l'aide du binôme de Newton que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]$ est un entier pair.

   b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

18. Déterminer a et b pour que $\sum(\ln(n) + a.\ln(n+1) + b.\ln(n+2))$ converge et sommer alors la série.

Produit infini.

19. Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   On pose : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $P_N = \prod_{n=0}^{N} u_n$.

   a. Montrer que : ((P_N) converge vers une limite non nulle) $\Leftrightarrow$ ($\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ converge).

   b. Que dire si (P_N) tend vers 0 ?

Séries alternées et autour des séries alternées.

20. Etudier la convergence de :

   • $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, • $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\frac{1}{n}\right)$, • $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}}$.

21. Etudier la convergence de la série $\sum \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$.

22. Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.n^{\alpha}.\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n.n^{\alpha}}{n^{2.\alpha}}$, pour : $\alpha \in \mathbb{R}$.

23. Soit (u_n) la suite définie par :

   • $u_0 > 0$, et :

   • $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

   b. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n.u_n$

   c. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$.

   d. En utilisant la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$

Vrai-faux.

24. Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

   • ($\sum u_n$ converge) $\Rightarrow$ ((u_n^2) converge).

   • ($\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ diverge).

   • ($\sum u_n$ converge, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ converge).

   • ($\sum u_n$ convergente, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$) $\Rightarrow$ ($\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ convergente).

Autour de la série harmonique.

25. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2.n}$.

Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

26. a. Rappeler la valeur de $(1^2 + 2^2 + ... + n^2)$, pour : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$.

c. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer sa somme.

Niveau 2.

Séries télescopiques.

27. Pour $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série réelle positive, on pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ peut se mettre sous la forme d'une série télescopique.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

c. Dans le cas où la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, préciser la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

28. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série réelle à termes strictement positifs et soit (u_n) la suite définie par :

- $u_0 > 0$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$.

a. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, la suite (u_n) converge également.

b. Montrer que si on pose :

- $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = 1$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$,

on peut construire une suite (a_n) telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$, et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est à termes strictement positifs et divergente.

Qu'en déduit-on ?

29. Soit (u_n) une suite réelle définie par :

- $u_0 \in]0,1[$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + u_n^2)$.

a. Etudier la convergence de la suite (u_n).

b. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

30. Soit (u_n) la suite définie par :

- $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

b. En utilisant $(u_{n+1} - u_n)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ converge.

c. En utilisant $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.

31. Soit (u_n) une suite croissante strictement positive qui tend vers +∞.

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$.

En utilisant la suite (w_n) où : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

32. Etudier la convergence des séries suivantes :

- $\displaystyle\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
- $\displaystyle\sum \left[(n^a + 1)^{\frac{1}{a}} - (n^b + 1)^{\frac{1}{b}}\right]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$,
- $\displaystyle\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

33. Pour : $x \in \mathbb{R}$, et : $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n.x^n$.

a. Trouver une condition nécessaire pour que (S_N) converge.

b. A l'aide de $(1-x).S_N$, calculer S_N.

c. En déduire que (S_N) converge et préciser sa limite.

34. Soit (a_n) une suite positive, et (u_n) la suite définie par :

- $u_0 > 0$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, et croissante.

c. Montrer que si (u_n) converge, sa limite est strictement positive puis que la série $\sum a_n$ converge.

d. Réciproquement, montrer que si $\sum a_n$ converge, la suite (u_n) est convergente.

35. Soient $\sum u_n$ et $\sum \alpha_n$ des séries à termes strictement positifs, telles que :

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.

a. Montrer que : $u_n = O_{+\infty}(\alpha_n)$.

b. Que peut-on en déduire entre la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum \alpha_n$?

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

36. Pour : $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\forall\ n \in \mathbb{N} : u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{P(n)}$.

a. Montrer que pour que (u_n) tende vers 0, il faut que P soit de degré 2.

Montrer de plus que le coefficient dominant de P ne peut être que 1 puis qu'alors, (u_n) est bien définie au moins à partir d'un certain rang.

b. Déterminer P pour que la série de terme général u_n converge.

37. Pour : $x \in \mathbb{R}^{+*}$, et : $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{x^n}.\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

a. Etudier la série de terme général $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et en déduire que (u_n) converge en précisant sa limite.

b. Montrer que : $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ converge (on précisera la valeur de α).

c. Pour cette valeur, montrer que : $\exists\ A \in \mathbb{R}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} A.n^{\alpha}$.

d. Etudier la convergence la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

38. En transformant $\sin(2.\alpha)$, étudier la série $\sum \ln\left(\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$, pour : $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, et donner sa somme.

39. Montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{2.n-1}{n.(n^2-1)}$, et à l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer sa somme.

40. Soit $\sum z_n$ une série complexe convergente, et : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$.

a. Montrer que : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{z_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{S_n}{n.(n+1)} + \dfrac{S_N}{N+1}$.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{z_n}{n}$ converge.

41. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$, et : $T_n = S_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

a. Montrer que les deux suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes en précisant leur limite commune.

b. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels (p_n) et d'une suite de réels (r_n), telles que :

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n!.e = p_n + r_n$,
- (r_n) converge vers 0.

c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq e - S_{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!}$, et en déduire un équivalent de r_n en $+\infty$.

d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\sin(2.\pi.n!.e)$?

e. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\sin(\pi.n!.e)$?

Produit infini.

42. Pour : $N \geq 2$, on pose : $P_N = \prod\limits_{n=2}^{N}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

a. Justifier que : $\forall\ N \geq 2$, $P_N > 0$, puis à l'aide du logarithme, montrer que (P_N) tend vers 0.

b. En utilisant un équivalent lié à la série harmonique, montrer que : $\exists\ C \in \mathbb{R}^*$, $P_N \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{N}}$.

43. Pour (u_n) une suite à termes positifs, on pose : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $P_N = \prod\limits_{n=0}^{N}(1+u_n)$.

Montrer l'équivalence : ((P_N) converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge).

Séries alternées et autour de la série alternée.

44. Etudier la convergence de la série $\sum(-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

45. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!}$ converge et que sa somme est un réel négatif.

46. a. Justifier l'existence de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k.(k+1)}$.

c. Déterminer un équivalent de R_n en $+\infty$.

d. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} R_n$.

Autour de la série harmonique.

47. Pour : $n \geq 1$, on pose : $S_N = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\sqrt{k}}$.

a. Donner un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

b. Montrer qu'il existe : $C \in \mathbb{R}$, $S_n = \ln(n) + C + \varepsilon(n)$, où $(\varepsilon(n))$ tend vers 0 en $+\infty$.

Séries de Bertrand.

48. a. On note f la fonction définie sur $]1,+\infty)$ par : $\forall\ x > 1,\ f(x) = \ln(\ln(x))$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n.\ln(n)}$ diverge.

b. Montrer que : $\forall\ \alpha < 1$, $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha.\ln(n)}$ diverge.

c. Montrer que : $\forall\ \alpha \geq 2$, $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta}$ converge.

Produit de Cauchy.

49. Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ par elle-même converge.

50. Pour : $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $\forall\ n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha.(n-k)^\alpha}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge pour : $\alpha \leq 0$.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge pour : $1 < \alpha$.

c. A l'aide de la fonction : $x \mapsto x.(1-x)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge pour : $0 < \alpha \leq 1$.

<u>Niveau 3.</u>
Séries télescopiques.

51. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la suite $(n^\alpha.u_n)$ converge et préciser ce qu'on peut dire de sa limite.

b. Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

c. Pour quelles valeurs de α la série $\sum(-1)^n.u_n$ converge-t-elle ?

Séries à termes positifs ou de signe constant.

52. Nature de la série de terme général : $e^{a.n^2}.\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^b}$, où a et b sont des réels.

53. Etudier la convergence des séries suivantes :

- $\sum\left[\arctan\left(1+\frac{1}{n^a}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$, a > 0,
- $\sum\left[\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

54. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq1}\frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$, et calculer sa somme.

55. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que : $\exists\ L \in [0,+\infty)$, $\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right)$ tend vers L en $+\infty$.

a. Montrer que si : $L<1$, alors la série converge.
b. Montrer que si : $L>1$, alors la série diverge.

c. Appliquer cette règle à la série : $\sum_{n\geq2}\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ (cette règle s'appelle la règle de Cauchy).

56. Soit (u_n) une suite de réels positifs et (b_n) une suite strictement décroissante de réels de limite nulle.

a. Montrer que si $\sum_{n\geq1}u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq1}\left((b_n-b_{n+1}).\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{b_k}\right)$ converge et que leurs sommes sont égales.

b. En déduire que si $\sum_{n\geq1}u_n$ converge, alors : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n.(n+1)}.\sum_{k=1}^{n}k.u_k\right)$.

c. Déduire de même de la question a que si (u_n) est une suite strictement décroissante de limite nulle et si $\sum_{n\geq1}u_n$ converge, alors : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}n.(u_n-u_{n+1})$.

d. A l'aide de la question c, retrouver la divergence de la série harmonique.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

57. Pour : $n\in\mathbb{N}$, on pose : $u_n=\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.n!^2}$.

a. En étudiant la série de terme général $(\ln(u_n)-\ln(u_{n+1}))$, montrer que (u_n) tend vers 0.

b. En étudiant la série de terme général $(\ln((n+1).u_{n+1})-\ln(n.u_n))$, montrer que $(n.u_n)$ tend vers $+\infty$.

On pose : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{u_n}{n+1}$, et : $\forall\ N\in\mathbb{N}$, $V_N=\sum_{n=0}^{N}v_n$.

c. Montrer que : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $(2.n+4).v_{n+1}=(2n+1).v_n$.

d. En déduire, en sommant les égalités précédentes, une expression de V_N à l'aide de N et de u_{N+1}.

e. En déduire que (V_N) converge puis donner la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n+1}$.

58. Montrer que la série de terme général $\frac{1+\sqrt{n+1}-2.\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ converge et préciser sa somme.

59. Soit : $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, et (u_n) définie par :

- $u_0 = \alpha$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{n-a}{n-b}.u_n$.

a. En posant : $v_n = n^\beta.u_n$, et en étudiant (pour n assez grand) la série de terme général $(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$, montrer qu'il existe une valeur de β que l'on précisera pour laquelle cette série converge.

b. En déduire : $\exists\ (A,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\beta}$.

c. Indiquer pour quelles valeurs de a et de b la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, et en revenant à des sommes partielles, montrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{b+1}{b+1-a}.\alpha$.

Séries alternées, et autour des séries alternées.

60. Etudier la convergence de :

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$,
- $\sum \sin(2.\pi.\sqrt{n^2 + (-1)^n})$.

61. On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que : $\forall\ n \geq 0,\ u_{n+2} = (n+1).u_{n+1} + u_n$.

a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En remarquant que tout élément de E est défini par ses deux premiers termes, donner une base de E.

b. On note (a_n) et (b_n) les éléments de E tels que : $a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$.
Montrer que ces deux suites sont croissantes à partir du rang 1 et tendent vers $+\infty$.

c. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = a_{n+1}.b_n - a_n.b_{n+1}$.
Calculer w_n pour tout entier n.

d. On définit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
A l'aide de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(c_{n+1} - c_n)$, montrer que la suite (c_n) converge vers un réel que l'on notera L.

e. En étudiant $(L - c_n)$ en déduire l'existence d'un unique réel α tel que $(a_n + \alpha.b_n)$ converge vers 0.

62. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Vrai-faux.

63. Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

a) ($\sum a_n$ convergente, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ convergente).

b) ($\sum u_n$ convergente) $\Rightarrow$ ($\sum (-1)^n.u_n{}^3$ convergente).

Autour de la série harmonique.

64. Pour : $a > 0$, et : $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{a.(a+1)...(a+n-1)}{n!}$.

a. En étudiant $\ln(u_n)$ et suivant les valeurs de a, donner la nature et la limite éventuelle de la suite (u_n).

b. En utilisant au besoin la suite $\ln(n.u_n)$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

65. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $n_p = \min\{n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq p\}$.

a. Justifier l'existence de n_p pour tout entier p (on précisera n_0, n_1, n_2, n_3).

b. Montrer que (n_p) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

c. A l'aide d'encadrements, montrer que : $n_p \underset{+\infty}{\sim} e^{p-\gamma}$, où γ est la constante d'Euler.

Sommation par paquets.

66. On considère la série de terme général : $u_n = (-1)^n . \frac{\sin(\ln(n))}{n}$, pour : $n \geq 1$.

a. A l'aide de sommes partielles, montrer que la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est équivalente à celle de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$, avec : $\forall\ n \geq 1$, $v_n = (u_{2.n} + u_{2.n+1})$.

b. Montrer que : $\forall\ n \geq 1$, $v_n = \frac{\sin(\ln(2.n))}{2.n.(2.n+1)} + w_n$.

c. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge, et en déduire la convergence de $\sum_{n\geq 1} v_n$ puis de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

67. On définit, à partir de la série harmonique, une nouvelle série de terme général a_n de la façon suivante : on prend p termes positifs, puis q termes négatifs, puis à nouveau p termes positifs, et ainsi de suite…

Ainsi, pour : $p = 3$, $q = 2$, on aura : $a_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$, etc…

Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

68. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}}$, où j est la racine cubique de l'unité habituelle.

a. Montrer que la série de terme général $(u_{3.n} + u_{3.n+1} + u_{3.n+2})$ est convergente.

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Transformation d'Abel.

69. Pour (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on note, pour : $p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_p = \sum_{k=1}^{p} v_k$.

a. Montrer que : $\forall\ p \geq 1$, $\sum_{k=1}^{p} u_k.v_k = u_p.\sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1} (u_k - u_{k+1}).\sigma_k$.

b. On suppose de plus que ces suites sont telles que :

- (u_n) est réelle, décroissante de limite 0,
- la suite (σ_p) est une suite bornée.

Montrer que la série de terme général $u_n.v_n$ converge.

c. Etudier la convergence des séries :

- $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n)}{n}$
- $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i.n.\theta}}{n^{\alpha}}$, avec : $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$.