Chapitre 2 : Séries numériques

Table des matières

1 Généralités sur les séries

1.1 Premiers exemples

Definition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n la suite de terme général $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On note cette série $\sum u_n$ au lieu de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le terme S_n est la somme partielle d'indice n de cette série.

Remarque : Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est définie qu'à partir du rang n_0 il en est de même pour la série $\sum u_n$: $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite nulle à partir d'un certain rang. La série $\sum u_n$ est constante à partir d'un certain rang.

Definition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit que la série diverge.

Lorsqu'il y a convergence,

1. *on appelle somme de la série de terme général u_n et on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou S la limite de la suite des sommes partielles :*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

2. *on appelle reste d'ordre n de la série de terme général u_n la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

Remarque : Ne pas confondre les notations $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Proposition 1

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ S = R_n + S_n$$

Exemples classiques

Proposition 2

Soit $q \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la série géométrique $\sum q^n$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 \text{ lorsque } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ sinon} \end{cases}$
2. Si $|q| < 1$, la série est convergente et
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$
3. Si $|q| \geq 1$, la série est divergente

Proposition 3

1. La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
2. $\exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc la série harmonique diverge.

1.2 Propriétés

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque : C'est un critère de non convergence, pas de convergence.

Vocabulaire : Lorsque le terme général ne tend pas vers 0, on parle de divergence grossière.

Exemple : La série $\sum \cos(n)$ diverge grossièrement.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple : Etudier la nature des séries $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

Exemple : Montrer que la suite $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ converge.

Proposition 6

1. L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.
(La somme de deux séries convergentes forme une série convergente.)
2. L'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur l'ensemble des séries convergentes.

Remarque :

1. La somme de deux séries divergentes peut donner une série convergente.
2. La somme d'une série convergente et d'une série divergente forme une série divergente.

1.3 Séries à termes complexes

Proposition 7

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathbf{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Exemple : La série $\sum \mathbf{e}^{\mathbf{i}n}$ diverge.

2 Séries à termes positifs

Definition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

2.1 Critères de convergence

Proposition 8

Une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq S$.
2. Si elle diverge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exemple :

1. Montrer que $\forall k \geq 2,\ k! \geq 2^{k-1}$.
2. Etudier de la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n!}$.

Remarque : C'est encore vrai quand la suite est positive à partir d'un certain rang n_0.

2.2 Comparaison de séries à termes positifs

Proposition 9

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

2. Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Remarque : Le résultat reste vrai lorsque l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0.

Exemple : Etude de la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exemple : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes.

1. La série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
2. La série $\sum u_n^2$ converge.

Proposition 10

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont la même nature.

Remarque : Il y a donc des séries de référence à connaître par cœur.

2.3 Séries de Riemann

Definition 4

On appelle série de Riemann les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann.

Proposition 11

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2.4 Règle de d'Alembert

Proposition 12

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs telles que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Proposition 13

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple : Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 0} nx^n$ selon la valeur de x.

2.5 Comparaison série - intégrale

Proposition 14

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$.

1. La série $\sum \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$ converge.
2. La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la quantité $\int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Exemple : Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

Exemple : Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Formule de Stirling

Proposition 15

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque : La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

Exemple : Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

3 Séries à termes quelconques

3.1 Séries absolument convergentes

Definition 5

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que cette série est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Remarque : Pour une série à termes positifs, la convergence et la convergence absolue sont identiques.

Remarque : Pour étudier la convergence absolue, on est amené à étudier la nature d'une série à termes positifs.

Proposition 16

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge et de plus

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Remarque : La réciproque est fausse pour une série de signe quelconque.

Exemple : Etude de la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^n}$.

Proposition 17

L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.

Proposition 18

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.
$\sum u_n$ converge absolument si, et seulement si, les deux séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent absolument.

Proposition 19

La série $\sum z^n$ est absolument convergente si, et seulement si, $|z| < 1$.

3.2 Comparaison de séries de signe quelconque

Proposition 20

Soit $\displaystyle\sum u_n$ une série complexe et soit $\displaystyle\sum v_n$ une série à termes réels positifs.

Si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si la série $\displaystyle\sum v_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum u_n$ est convergente.

Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et si la série $\displaystyle\sum v_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum u_n$ est convergente.

Exemple : Etude de la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Remarque : Les DL_n seront utiles pour déterminer la nature de certaines séries.

3.3 Séries alternées

Definition 6

On appelle série alternée une série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de signe constant.

Exemple : Les séries de la forme $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont les séries de Riemann alternées.

Proposition 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de signe constant telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et converge vers 0.
La série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.

Exemple : Etudier la nature des séries de Riemann alternées.

Remarque : Pour $\alpha \in]0,1[$, on obtient des séries convergentes mais pas absolument convergentes. On parle de semi-convergence.

Exemple : Etudier la nature de la série $\sum(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proposition 22

Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$.
Soit $S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ la somme de cette série.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq S \leq S_{n+1}$ ou $S_{n+1} \leq S \leq S_n$.
2. La somme S est du signe de u_0 et $|S| \leq |u_0|$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq |u_{n+1}|$ et les réels R_n et u_{n+1} sont de même signe.

4 Produit de Cauchy de séries à termes complexes

4.1 Définition

Remarque : Calculer $(a_1 + \cdots + a_n).(b_1 + \cdots + b_n)$

Definition 7

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs complexes.
On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

Exemple : Soit $\sum z^n$ une série complexe. Déterminer le produit de Cauchy de cette série avec elle-même.

Proposition 23

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à valeurs complexes absolument convergentes alors, le produit de Cauchy est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.

4.2 Fonction exponentielle

Remarque : Rappeler le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle.

Proposition 24

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Definition 8

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle exponentielle complexe la fonction $\exp : z \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 25

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \exp(z + z') = \exp(z).\exp(z').$$