T.D. 6 – Séries entières

1. © Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls telle que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ ait pour rayon de convergence 1. On suppose en outre que sa somme S est bornée sur $[0,1[$.

Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Ce résultat subsiste-t-il lorsque les a_n sont de signe quelconque ?

(Voir en complément au verso le théorème d'Abel.)

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{1.3.\ldots.(2n+1)} \cdot x^{2n+1}$.

Montrer que sa somme f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Expliciter f.

3. Exprimer à l'aide d'une intégrale la solution f de l'équation différentielle $y' = 2xy+1$ telle que $f(0)=0$.

Exprimer de deux manières le développement en série entière de f ; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+1}$.

4. On pose : $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et établir : $\forall x \in [0,1[\quad \displaystyle (x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) x^n$.

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1.

5. Déterminer le rayon de convergence, le domaine réel de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n x^n}{(n+1)!} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} x^n.$$

6. Déterminer l'ensemble de définition de $\displaystyle f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[x^n + (1-x)^n\right]$.

Étudier la dérivabilité de f et calculer f'. En déduire l'expression de $f(x)$.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *dérangement* de $\mathbb{N}_n$ toute permutation de $\mathbb{N}_n$ n'admettant aucun point fixe.

On note D_n le nombre de dérangements de $\mathbb{N}_n$ $(D_0 = 1)$ et l'on considère $\displaystyle f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$.

a) Établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière considérée est supérieur ou égal à 1 et calculer $e^x f(x)$, pour $x \in]-1,1[$.

c) En déduire la valeur de D_n et vérifier que, pour tout $n \geq 1$, D_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{n!}{e}$.

8. © *<u>Inverse d'une série entière</u>* : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $a_0 = 1$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite (b_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.

b) Soit $r \in]0,R[$; justifier l'existence de $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n r^n| \leq M$.

r et M étant ainsi fixés, établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |b_n| \leq \frac{M\,(M+1)^{n-1}}{r^n}.$$

c) En déduire que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. Conclure.

9. © <u>*Théorème d'Abel*</u> : soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$.

Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors $f(x)$ tend vers la somme de cette série lorsque x tend vers R par valeurs inférieures.

Pour démontrer cela :

- montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$
- utiliser la transformation d'Abel : poser $S_{-1} = 0$, $S_p = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$ et établir

$$\forall x \in \left]0, 1\right[\quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n \left(x^n - x^{n+1}\right) + S_N x^{N+1}$$

- en déduire

$$\forall x \in \left]0, 1\right[\quad f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

- conclure.