# Chapitre 13

# Séries entières

Nous avons déjà montré à l'aide du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, que pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nous avons également prouvé dans le chapitre **Séries numériques** que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. L'un des raisonnements que nous avions faits, basé sur la formule de Taylor avec reste intégral, montrait même que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Il semble donc que les séries de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ jouent un rôle particulier et que des fonctions usuelles se représentent comme somme de telles séries ; c'est ce que nous allons étudier dans ce chapitre.

## I. Définition et convergence des séries entières

### 1. Définition, rayon de convergence

**Définition – Série entière**

Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $x$ est une variable réelle, ou de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $z$ est une variable complexe, les coefficients $a_n$ étant des nombres complexes.

On dit que cette série est associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou qu'elle a pour coefficients les nombres $a_n$.

L'étude de la convergence des séries entières est basée sur le lemme suivant :

**Lemme d'Abel**

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration – Si $z_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

La suite $(a_n z_0^n)$ étant bornée, on en déduit que

$$a_n z^n = O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right).$$

De plus, la série géométrique de raison $|z/z_0| \in [0{,}1[$ est convergente. Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument. $\square$

Définissons alors

$$I = \{\rho \geqslant 0;\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \quad \text{et} \quad R = \sup I \in [0, +\infty].$$

- Ce nombre est bien défini car la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée par exemple pour $\rho = 0$, donc $I$ est non vide.
- La borne supérieure est calculée dans $\overline{\mathbb{R}}$, et notamment, $R$ peut être infini ; c'est le cas si et seulement si la partie $I$ n'est pas majorée.
- Il est tout à fait possible que $R \notin I$, même lorsque $R$ est fini : cela correspond à la situation où $(a_n R^n)$ n'est pas bornée.
- $R$ ne dépend que de $(a_n)$ et notamment, il est le même, que la série entière soit de la variable réelle, ou de la variable complexe.

Exemples

- La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est une série entière. Pour $\rho \geqslant 0$, la suite $(\rho^n)$ est bornée si et seulement si $\rho \leqslant 1$. On a donc ici $I = [0{,}1]$, d'où $R = 1$.
- Dans le cas de la série $\sum_{n\geqslant 0} n z^n$, pour $\rho \geqslant 0$, la suite $(n\rho^n)$ est bornée si et seulement si $\rho < 1$ : on a $I = [0{,}1[$ et ici aussi $R = 1$.

**Propriété**

On utilise les notations précédentes. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

- Si $|z| < R$, alors par définition de la borne supérieure, il existe $\rho \in I$ tel que $|z| < \rho$. Alors la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée et d'après le lemme d'Abel, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$ et donc $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée, ce qui entraîne que $a_n z^n$ ne tend pas vers 0. En particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. $\square$

**Définition – Rayon de convergence, disque/intervalle ouvert de convergence**

- On appelle $R$ le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, ou $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
- Dans le cas d'une variable complexe, l'ensemble $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière.
  Si $R = +\infty$, il s'agit de $\mathbb{C}$ tout entier.
- Dans le cas d'une variable réelle, l'intervalle $]-R,R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence** de la série entière. Si $R = +\infty$, il s'agit de $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarques

• Les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence car, pour $\rho \geqslant 0$, $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

• En fait, $R$ est entièrement caractérisé par les deux premiers points de la propriété précédente : si $R$ et $R'$ sont deux réels vérifiant cette propriété, et si par exemple $R < R'$, alors pour $R < r < R'$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ doit être à la fois convergente et divergente, ce qui est absurde. On a donc $R \geqslant R'$ et de même $R \leqslant R'$.

Méthode – On a plusieurs moyens pour minorer et majorer le rayon de convergence $R$, notamment, pour tout $r \geqslant 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ :

• Si la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée pour tout $\rho$ tel que $0 \leqslant \rho < r$, alors $R \geqslant r$.

• Si la suite $(a_n\rho^n)$ est non bornée pour tout $\rho > r$, alors $R \leqslant r$.

• Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, alors $R \geqslant r$.

• Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$, alors $R \leqslant r$.

• Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge ou si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $R \geqslant |z_0|$.

• Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.

Ces résultats proviennent, suivant les cas, de la définition de $R$, de la propriété précédente, ou se démontrent comme le résultat de la deuxième remarque ci-dessus.

Exemple – La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de convergence infini : d'après la règle de d'Alembert, elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

La propriété suivante, basée sur le théorème de comparaison, permet de comparer les rayons de convergence de deux séries entières :

**Propriété – Comparaison de rayons de convergence**

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$.

• Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

• Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration

• Sachant que $a_n = O(b_n)$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$a_n z^n = O(|b_n z^n|).$$

Si $|z| < R_b$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ converge absolument, donc par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et donc converge. On en déduit que $R_a \geqslant R_b$ d'après le troisième point de la méthode précédente.

• Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, donc d'après le point précédent, $R_a \geqslant R_b$ et $R_b \geqslant R_a$, d'où le résultat. □

Remarques

• Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n$ assez grand, alors $a_n = O(b_n)$, donc $R_a \geqslant R_b$.

• Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemples

• La série $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$ est une série entière de rayon de convergence $R$ égal à 1. En effet, on a $1/n = O(1)$, donc d'après le point précédent et la propriété ci-dessus, $R \geqslant 1$. De plus, pour $z = 1$, la série obtenue est la série harmonique, divergente. On en déduit que $R \leqslant 1$.

Remarquons au passage que pour $z = -1$, de module 1, la série obtenue est la série harmonique alternée, convergente. On retiendra donc de ces exemples qu'aux points du bord du disque de convergence, on peut avoir convergence comme divergence de la série. En revanche, si $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|R^n$ converge, alors par définition même, la série converge absolument en tout point du bord du disque de convergence. En dehors de ce cas particulier, on ne donnera dans ce cours aucun résultat général de convergence au bord du disque de convergence, qui devra donc être examinée au cas par cas.

• On a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)z^n$ a pour rayon de convergence 1 d'après la propriété ci-dessus.

## 2. La règle de d'Alembert pour les séries entières

Pour étudier la convergence des séries, nous disposons de la règle de d'Alembert, dont on sait qu'elle permet de conclure à des convergences absolues ou des divergences grossières, ce qui est le cas des séries entières en dehors du bord du disque de convergence. Il paraît donc judicieux de tester cette règle dans le cadre des séries entières.

Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$. Supposons que $a_n\neq 0$ pour $n$ assez grand. Pour $z=0$, la série converge toujours. Si $z\neq 0$, le quotient apparaissant dans la règle de d'Alembert est (pour $n$ assez grand)

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|.$$

Supposons que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ possède une limite $\ell$ (éventuellement infinie). Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell\,|z|.$$

D'après la règle de d'Alembert :

• Si $\ell=0$, la série converge absolument quel que soit $z$ et $R=+\infty$.

• Si $\ell=+\infty$, elle ne converge que pour $z=0$ et $R=0$.

• Si $\ell\in]0,+\infty[$, alors : si $\ell|z|<1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ converge absolument, et si $\ell|z|>1$, elle diverge grossièrement. Ainsi $R=1/\ell$.

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

**Théorème – Règle de d'Alembert pour les séries entières**

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière. On suppose que $a_n\neq 0$ pour $n$ assez grand, et qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}_+$ ou $\ell=+\infty$ tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\ell.$$

Alors le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ est donné par :

$$R=\begin{cases}1/\ell & \text{si } \ell\in]0,+\infty[\\ +\infty & \text{si } \ell=0\\ 0 & \text{si } \ell=+\infty\end{cases}$$

Remarque – Comme pour la règle de d'Alembert usuelle, il n'existe pas de réciproque : le quotient $|a_{n+1}/a_n|$ peut ne pas avoir de limite, voire ne pas être défini, alors que le rayon de convergence existe toujours. En particulier, lorsque cette règle ne s'applique pas, il faut penser aux autres moyens que nous avons exposés pour déterminer un rayon de convergence.

Exemples

• La série entière $\sum_{n \geqslant 0} n z^n$ a pour rayon de convergence 1 car $\dfrac{n+1}{n} \to 1$.

• La série entière $\sum_{n \geqslant 0} n!\, z^n$ a pour rayon de convergence 0 car $\dfrac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \to +\infty$. Elle ne converge que pour $z = 0$.

• La série entière $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{2^n}{n!^2} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ car

$$\frac{2^{n+1}/(n+1)!^2}{2^n/n!^2} = \frac{2}{(n+1)^2} \to 0.$$

Elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

• Attention aux séries dites « lacunaires », dans lesquelles tous les exposants n'apparaissent pas, comme la série

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^n \ln(n)\, z^{2n}.$$

Pour cette série, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 2^p \ln(p)$ si $p \geqslant 1$, mais $a_{2p+1} = 0$. Il ne faut pas faire l'erreur de dire que $a_n = 2^n \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui donnerait un rayon de convergence (faux) de $1/2$. Pour $n \geqslant 2$, et $z \neq 0$,

$$\left| \frac{2^{n+1} \ln(n+1)\, z^{2(n+1)}}{2^n \ln(n)\, z^{2n}} \right| = 2\, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} |z|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2|z|^2.$$

On en déduit que la série converge absolument si $2|z|^2 < 1$ et diverge si $2|z|^2 > 1$. Le rayon de convergence est donc $1/\sqrt{2}$. On retiendra que pour appliquer la règle de d'Alembert à de telles séries, il faut revenir à la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

## 3. Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence

Nous savons déjà que la convergence des séries entières est absolue sur le disque ouvert de convergence. Qu'en est-il de la convergence uniforme ou normale ?

**Théorème**

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence $R$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Alors $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$.

Démonstration – Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-R,R[$ et $r = \max\{|a|,|b|\} \in [0,R[$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n.$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument car $r \in [0,R[$, d'où le résultat. □

Attention ! Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur l'intervalle ouvert de convergence tout entier : par exemple, la série de fonctions associée à $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$, car la série $\sum_{n \geqslant 0} 1$ diverge.

## II. Opérations sur les séries entières

**Théorème – Somme de séries entières**

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$.
Alors le rayon de convergence $R$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ vérifie

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\},$$

avec égalité si $R_a \neq R_b$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration – Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ converge, et on a la formule annoncée. En particulier, on en déduit que $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

Si $R_a \neq R_b$ (par exemple $R_a < R_b$), alors pour $r$ vérifiant $R_a < r < R_b$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ diverge tandis que la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n r^n$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)r^n$ diverge. On a donc, dans ce cas, $R \leqslant \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

Remarque – On n'a pas toujours $R = \min\{R_a, R_b\}$ si $R_a = R_b$. Par exemple, les séries $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -z^n$ ont toutes les deux pour rayon de convergence 1, mais la série somme a un rayon de convergence infini.

**Théorème – Produit de Cauchy de séries entières**

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$.
Alors leur produit de Cauchy est la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n,$$

dont le rayon de convergence $R$ vérifie

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

Pour tout $z$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\right).$$

Démonstration – Le produit de Cauchy des deux séries est la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n}(a_p z^p)(b_q z^q)\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n.$$

Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent absolument, donc d'après le théorème de convergence du chapitre **Séries numériques**, on a convergence du produit de Cauchy, ainsi que la formule annoncée. En particulier $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

Exemple – Le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n z^n$ où, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Son rayon de convergence $R$ vérifie $R \geqslant 1$ ; de plus $\sum_{n\geqslant 1} H_n$ diverge grossièrement, donc $R = 1$.

Attention ! Il n'y a pas de cas d'égalité pour les rayons de convergence de produits de séries entières : les séries entières $1 - z$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs $+\infty$ et 1, qui sont distincts, mais leur produit de Cauchy est la série constante égale à 1, de rayon de convergence $+\infty > \min\{1, +\infty\}$. En effet, avec les notations du théorème, on a ici

$$\sum_{p+q=0} a_p b_q = a_0 b_0 = 1 \times 1 = 1,$$

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0.$$

# III. Régularité de la somme d'une série entière

## 1. Continuité

**Théorème**

- Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence $R$. Alors la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R,R[$.
- Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe, de rayon de convergence $R$. Alors la fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$.

Démonstration

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $]-R,R[$. De plus, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment de $]-R,R[$. D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, $S$ est continue sur $]-R,R[$.

• Conformément au programme, ce résultat est admis. □

## 2. Séries entières de la variable réelle : dérivation et intégration

La série des dérivées d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$. À un facteur près, on obtient la série $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$. On s'intéresse donc au rayon de convergence de cette série entière.

**Propriété**

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$.
Alors la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$$

a pour rayon de convergence $R$.

Démonstration – Notons $R'$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$. On a tout d'abord

$$a_n = O(n a_n)$$

donc $R \geqslant R'$.

Si $R = 0$, on a $R \leqslant R'$ ; si $R > 0$, soit $r \in [0,R[$ ; il existe $\rho$ tel que : $r < \rho$ et $(a_n \rho^n)$ est bornée. Alors $\rho > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$na_n r^n = n \, \frac{r^n}{\rho^n} \, a_n \rho^n,$$

la suite $\left(n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)$ étant bornée par croissances comparées, car $r/\rho \in [0,1[$. On en déduit que $(na_n r^n)$ est bornée ; ainsi $R' \geqslant R$, ce qui termine la démonstration. □

**Théorème – Primitivation terme à terme des séries entières**

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors, l'unique primitive de sa fonction somme $f$ sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0 est la fonction somme de la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

qui a pour rayon de convergence $R$.
On peut donc primitiver terme à terme les séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

Démonstration – D'après le théorème fondamental, l'unique primitive de $f$ sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Par continuité des fonctions $f_n : t \mapsto a_n t^n$ et convergence normale de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ sur tout segment de $]-R,R[$, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions : si $x \in ]-R,R[$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^x a_n t^n \, dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Cette série entière a pour rayon de convergence $R$, on le montre en raisonnant comme dans la propriété précédente. □

**Théorème – Dérivation terme à terme des séries entières**

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors sa fonction somme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et pour tout $x \in ]-R,R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

la série entière associée ayant pour rayon de convergence $R$.
On peut donc dériver terme à terme les séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

Démonstration – Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ avec $f_0' = 0$ et $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in ]-R,R[$. La série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]-R,R[$. Pour appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il suffit de vérifier que la série des dérivées, $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$, converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$. Or, cette dernière série est une série entière de rayon de convergence $R$ d'après la propriété précédente (le facteur $x$ ne modifie pas le rayon de convergence), d'où le résultat. □

On peut alors réitérer ce raisonnement avec la série des dérivées $k$-ièmes. On en déduit le résultat suivant :

**Théorème**

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors sa fonction somme $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R,R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in ]-R,R[$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n x^{n-k}.$$

**Corollaire – Expression des coefficients d'une série entière**

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Démonstration – Pour tout $x \in ]-R,R[$, on a d'après le théorème précédent,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n x^{n-k}.$$

En évaluant en $x = 0$ (ce qui est possible car $R > 0$), on obtient $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$, car seul le terme correspondant à $n = k$ fournit un terme éventuellement non nul. D'où le résultat. ☐

On en déduit en particulier que les coefficients $a_n$ sont entièrement déterminés par la donnée de la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul. Par exemple, et c'est intuitif, si la somme d'une série entière ne prend que des valeurs réelles, alors on sait que tous les coefficients de cette série entière sont réels, même si l'expression de ces coefficients ne le fait pas clairement apparaître.

Du corollaire précédent, on déduit immédiatement :

**Théorème – Unicité du développement en série entière**

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence supérieurs ou égaux à un certain $r > 0$. On suppose que pour tout $x \in ]-r,r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Application** – Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f$ sa fonction somme. Alors :

- $f$ est paire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
- $f$ est impaire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$.

Démonstration – Il suffit de traiter le cas où $f$ est paire, l'autre est similaire. Si $f$ est paire, alors pour tout $x \in ]-R,R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a donc $a_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne le résultat. La réciproque est claire. ☐

# IV. Développements en séries entières

## 1. Série de Taylor

**Définition – Fonction développable en série entière**

Soient $r > 0$ et $f : ]-r,r[ \to \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que $f$ est **développable en série entière** sur $]-r,r[$ si $f$ est la fonction somme d'une série entière sur $]-r,r[$, c'est-à-dire, s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de la variable réelle, de rayon de convergence au moins égal à $r$, telle que

$$\forall\, x \in ]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple – Pour tout $x \in ]-1,1[$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ce développement en série entière de arctan est explicitement au programme, il est à connaître.

Remarque – Le rayon de convergence de la série entière précédente est 1, même si la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est pour cela qu'on a introduit le paramètre $r$ dans la définition, qui permet de se placer au voisinage de 0. □

Si $f$ est développable en série entière sur $]-r,r[$, par unicité du développement en série entière, les éventuels coefficients $a_n$ sont alors entièrement déterminés : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et on a nécessairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Définition – Série de Taylor**

Soit $f : ]-r,r[ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $r > 0$. On appelle **série de Taylor** de $f$ (en 0) la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Si $f$ est développable en série entière sur $]-r,r[$, elle ne peut être somme que de sa série de Taylor. Le problème de la recherche des coefficients $a_n$ ne se pose donc presque pas, en revanche, se pose le problème de la convergence de la série de Taylor, seule « candidate » à avoir pour somme $f$, et le problème de l'égalité entre sa somme et $f$.

Commençons par donner des contre-exemples qui prouvent que ces deux problèmes ne sont pas anodins.

• On peut prouver qu'il existe une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = (n!)^2$. Alors la série de Taylor de $f$ a un rayon de convergence nul car il s'agit de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n!\, x^n$.

• Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$. On prouve facilement que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. En effet, le seul problème est évidemment en 0, mais on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

Par croissances comparées, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. On obtient alors le résultat par applications successives du théorème de la limite de la dérivée.

La série de Taylor de $f$ en 0 est la série nulle : elle a évidemment un rayon de convergence infini, mais sa somme ne coïncide avec $f$ qu'en 0 puisque $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

## 2. Lien avec les formules de Taylor

Bien sûr, la série de Taylor d'une fonction $f$ n'est pas sans rapport avec les formules de Taylor pour la fonction $f$ : on voit bien qu'elles font toutes intervenir les termes $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Tout d'abord, supposons que $f$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ ; on a donc, pour tout $x \in ]-r,r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre $k$, on a

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^k).$$

Ainsi, le développement limité à l'ordre $k$ de $f$ en 0 est obtenu par troncature à l'ordre $k$ de son développement en série entière.

Écrivons maintenant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $k$ en 0 pour une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $I$ contenant 0 :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

Si l'on est capable de prouver que le reste intégral converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$ pour tout $x$ dans un intervalle de la forme $]-r,r[ \subset I$, alors on obtiendra un développement en série entière de $f$ sur $]-r,r[$. En utilisant cette idée, on va prouver le résultat suivant :

**Propriété**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration – D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $k$ pour la fonction $f : t \mapsto e^{zt}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} e^z = f(1) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, z^{k+1} e^{zt}\, dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, z^{k+1} e^{zt}\, dt \right| &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, |z^{k+1}| |e^{zt}|\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, |z^{k+1}|\, e^{\mathcal{R}e(z)t}\, dt \\ &\leqslant |z|^{k+1}\, e^{|\mathcal{R}e(z)|} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, dt \\ &= |z|^{k+1}\, e^{|\mathcal{R}e(z)|}\, \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$, par croissances comparées. On en déduit le résultat par passage à la limite dans la formule de Taylor ci-dessus. $\square$

## 3. Autres développements en série entière de référence

Nous allons donner quelques développements en série entière usuels, en plus de ceux de arctan et exp. On peut alors en construire beaucoup d'autres par :

- Combinaison linéaire,
- Produit de Cauchy,
- Primitivation et dérivation terme à terme.

Bien sûr, commençons par rappeler le développement en série entière correspondant à la série géométrique :

**Propriété**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Remarque – On a en particulier, pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

ce dernier développement étant obtenu par dérivation du premier (on l'avait déjà prouvé par produit de Cauchy dans le chapitre **Séries numériques**).

En intégrant terme à terme le deuxième développement de la remarque précédente, on obtient :

**Propriété**

Pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Remarque – Bien sûr, en changeant $x$ en $-x$, on a aussi, pour tout $x \in ]-1,1[$ ,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En prenant parties réelle et imaginaire de $\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!}$ et en utilisant $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on a également :

**Propriété**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Enfin, donnons le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ :

**Propriété**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

L'égalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, auquel cas on reconnaît la formule du binôme de Newton.

Démonstration – Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, le résultat est connu, il s'agit de la formule du binôme (et c'est en fait une somme finie). Sinon, en posant $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in ]-1,1[$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série de Taylor de $f$ en 0,

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

a un rayon de convergence égal à 1 d'après la règle de d'Alembert : en effet, $\alpha$ n'étant pas entier naturel, $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)/(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!} \right| = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Notons $S$ la fonction somme de cette série. Alors $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha-n) \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

En séparant ce dernier terme en deux, on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$S'(x) = \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

toutes les séries entières dans l'égalité précédente ayant pour rayon de convergence 1. On reconnaît alors l'égalité

$$S'(x) = \alpha S(x) - x S'(x).$$

La fonction $S$ est donc solution de l'équation différentielle $(1+x)S' = \alpha S$ sur $]-1,1[$.

La fonction $x \mapsto \alpha \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction continue $x \mapsto \dfrac{\alpha}{1+x}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$S(x) = \lambda \exp\left(\alpha \ln(1+x)\right) = \lambda (1+x)^\alpha.$$

En remarquant de plus que $S(0) = 1$, on obtient $\lambda = 1$, donc $f = S$ sur $]-1,1[$, ce qui est le résultat souhaité. □