Séries entières (corrigé niveau 2).

Calcul de rayons de convergence.

27. a. Plusieurs méthodes ici.

On peut remarquer que si : $x = \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ diverge grossièrement car $(a_{2.n+1}.x^{2.n+1})$ ne tend pas vers 0, et donc : $R \leq \frac{1}{2}$.

De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 2^n$, et la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n.x^n$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$, d'où : $R \geq \frac{1}{2}$, et finalement : $R = \frac{1}{2}$.

b. On sait que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 10$.

Or la série entière $\sum_{n\geq 0} 10.x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (série géométrique).

Donc le rayon de convergence R cherché vérifie : $R \geq 1$.

De plus, pour : $x = 1$, la série diverge grossièrement.

En effet, si elle convergeait, cela signifierait que (a_n) tend vers 0, mais comme c'est une suite d'entiers, la suite devrait être stationnaire égale à 0.

Cela entraînerait que $\sqrt{2}$ est un nombre décimal donc rationnel, ce qui est faux.

Donc cette divergence en 1 montre que : $R \leq 1$, et finalement : $R = 1$.

28. • Soit : $0 < x < \frac{1}{b}$.

Alors : $|a.x| < |b.x| < 1$, et les deux séries géométriques $\sum_{n\geq 0} a^{2.n}.x^{2.n}$ et $\sum_{n\geq 0} b^{2.n+1}.x^{2.n+1}$ convergent.

De plus : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{2.N+1} a_n.x^n = \sum_{n=0}^{N} a^{2.n}.x^{2.n} + \sum_{n=0}^{N} b^{2.n+1}.x^{2.n+1} = \frac{1-(a.x)^{N+1}}{1-(a.x)^2} + b.x.\frac{1-(b.x)^{N+1}}{1-(b.x)^2}$,

d'où on déduit que : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2.N+1} a_n.x^n = \frac{1}{1-a^2.x^2} + \frac{b.x}{1-b^2.x^2}$.

De même : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{2.N+2} a_n.x^n = \frac{1-(a.x)^{N+2}}{1-(a.x)^2} + b.x.\frac{1-(b.x)^{N+1}}{1-(b.x)^2}$, et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{2.N+2} a_n.x^n = \frac{1}{1-a^2.x^2} + \frac{b.x}{1-b^2.x^2}$.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = \frac{1}{1-a^2.x^2} + \frac{b.x}{1-b^2.x^2}$.

• Soit : $x = \frac{1}{b}$.

Alors $\sum_{n\geq 0} b^{2.n+1}.x^{2.n+1}$ diverge grossièrement mais $\sum_{n\geq 0} a^{2.n}.x^{2.n}$ converge puisque : $|a.x| < |b.x| = 1$.

Donc les sommes partielles précédentes divergent et la série diverge.

La valeur charnière entre absolue convergence et divergence permet de conclure : $R = \frac{1}{b}$.

29. a. On peut commencer par étudier le coefficient de cette série :

$$\forall\ n \geq 2,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2.\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n^2.\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-n - \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)\right),$$

donc : $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$, et en notant : $\forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ u_n = (-1)^n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.z^n$, on a : $\forall\ n \geq 2,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}}.|z| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|z|}{e}$.

Donc $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ tend vers $\frac{|z|}{e}$, et le rayon de convergence de la série est : $R = e$.

b. On applique directement ici la règle de d'Alembert, après avoir noté : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{z^{n^2}}{n!}$, et :

$$\forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)!}.|z|^{(n+1)^2-n^2} = \frac{|z|^{2.n+1}}{n+1}.$$

Donc cette dernière suite converge si et seulement si : $|z| \leq 1$, et sa limite est alors nulle.

Plus précisément, la règle de d'Alembert montre que la série converge absolument si : $|z| \leq 1$, et diverge grossièrement si : $|z| > 1$.

Donc : $R = 1$.

c. On commence par préciser le coefficient générique :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} sh(k) = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} e^k - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{2}.\frac{1-e^n}{1-e} - \frac{1}{2}.\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.\frac{e^n}{e-1},$$

d'où : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{n.e^n}.\left(\sum_{k=1}^{n} sh(k)\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n}.\frac{1}{e-1}$,

et le rayon de convergence de la série entière vaut : $R = 1$.

d. On note tout d'abord que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \in [-1,0]$.

Puis $\varphi : h \mapsto \arccos(1-h)$, est dérivable sur]0,1[, et sa dérivée vaut :

$$\forall\ h \in]0,1[,\ \varphi'(h) = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(1-h)^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2.h-h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2.h}}.\left(1-\frac{h}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2.h}}.\left(1+\frac{h}{4}+o_0(h)\right),$$

d'où : $\varphi'(h) = \frac{1}{\sqrt{2.h}} + \frac{\sqrt{h}}{4.\sqrt{2}} + o_0(\sqrt{h})$,

et : $\varphi(h) = \varphi(0) + 2.\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}.\frac{h^{\frac{3}{2}}}{4.\sqrt{2}} + o_0(h^{\frac{3}{2}}) = \sqrt{2.h} + \frac{h^{\frac{3}{2}}}{6.\sqrt{2}} + o_0(h^{\frac{3}{2}})$.

On en déduit que : $\forall\ n \geq 2,\ \arccos\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = \sqrt{2.\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que : $\arccos\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$,

et on conclut que : $R = 1$.

e. On va distinguer deux cas, suivant la valeur de b, et utiliser la règle de d'Alembert.

On note pour cela : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ u_n = \frac{a^n}{1+b^n}.z^n$.

- si : $0 < b \leq 1$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^{n+1}}{a^n}.|z| = a.|z|$, et la limite de ce quotient conduit à : $R = \frac{1}{a}$,
- si : $1 < b$, alors : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^{n+1}}{a^n}.\frac{b^n}{b^{n+1}}.|z| = \frac{a}{b}.|z|$, et la limite de ce quotient donne : $R = \frac{b}{a}$.

f. On va commencer par un développement limité du coefficient générique de cette série entière.
Pour cela :

$$a_n = \left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} = \exp\left(n^a.\ln\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n^a.\ln\left(1+\frac{1}{2.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{n^{a-2}}{2}+o_{+\infty}(n^{a-2})\right).$$

Donc : $\forall\ z \in \mathbb{C}^*, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \left|\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}.z^n\right| = \exp\left(\frac{n^{a-2}}{2}+n.\ln(|z|)+o_{+\infty}(n^{a-2})\right)$.

On distingue alors trois cas :

- si : $a > 3$, (u_n) tend vers +∞ et la série diverge toujours grossièrement, soit : $R = 0$,
- si : $a = 3$, on distingue alors deux sous-cas :

si : $\frac{1}{2}+\ln(|z|) > 0$, la suite (u_n) tend vers +∞ est la série diverge grossièrement,

si : $\frac{1}{2}+\ln(|z|) < 0$, alors : $n^2.|u_n| = \exp\left(n.\left(\ln(|z|)+\frac{1}{2}\right)+2.\ln(n)+o_{+\infty}(n)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$,

et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.

On en déduit dans ce cas que la valeur charnière est : $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

- si : $a < 3$, on distingue à nouveau deux sous-cas :

si : $\ln(|z|) > 0$, (u_n) tend vers +∞ et la série diverge grossièrement,

si : $\ln(|z|) < 0$, alors : $n^2.|u_n| = \exp(n.\ln(|z|)+2.\ln(n)+o_{+\infty}(n))\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$,

et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.

On en déduit dans ce dernier cas que : $R = 1$.

Produit de Cauchy.

30. a. La fonction : $x \mapsto sh(x)$, est développable en série entière sur ℝ, et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n.x^{2.n+1}.$$

Donc : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ sh^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n.x^{2.n+2}$, avec :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n}a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2.k+1)!}.\frac{1}{(2.(n-k)+1)!} = \frac{1}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n}\frac{(2.n+2)!}{(2.k+1)!.(2.n-2.k+1)!}.$$

On reconnaît des coefficients binomiaux et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{2.n+2}{2.k+1} = \frac{1}{2}.\frac{2^{2.n+2}}{(2.n+2)!}$,

puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k+1} = 2^{n-1}$, avec :

- $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k+1} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$, et :
- $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k} - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2.k+1} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{n}{p} = (1-1)^n = 0$.

Donc : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ sh^2(x) = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2.n+2}}{(2.n+2)!}.x^{2.n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

b. Soit avec la trigonométrie hyperbolique, ou en revenant à une écriture en exponentielles, on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ sh^2(x) = \frac{1}{2}.(ch(2.x) - 1) = \frac{1}{2}.\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.x)^{2.n}}{(2.n)!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}.$$

31. On peut commencer par écrire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2.x)}{2} = \frac{1}{2}.\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{(2.x)^{2.n}}{(2.n)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}.$$

D'autre part, l'absolue convergence de la série entière de $\sin$ sur $\mathbb{R}$, permet d'écrire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.x^{2.n+2},$$

à l'aide d'un produit de Cauchy, et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2.k+1)!}.\frac{(-1)^{n-k}}{(2.n-2.k+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{2.n+2}{2.k+1},\ \text{soit :}$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}.x^{2.n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2.n)!}.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2.n}{2.k+1}\right).x^{2.n}.$$

L'unicité du développement en série entière de $\sin^2$ donne alors :

$$\forall\ n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2.n}{2.k+1} = \frac{(2.n)!}{(-1)^{n-1}}.b_{n-1} = \frac{(2.n)!}{(-1)^{n-1}}.(-1)^{n-1}.\frac{2^{2.n-1}}{(2.n)!} = 2^{2.n-1}.$$

Propriété de sommes de séries entières.

32. a. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence de cette série qui vaut 1.

b. On part de $(1+x).S(x)$, qui donne : $\forall\ x \in\ ]-1,1[$,

$$(1+x).S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n.\ln(n).x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n.\ln(n).x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n.\ln(n).x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln(n+1).x^n,$$

ou : $(1+x).S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.[\ln(n+1) - \ln(n)].x^n - \ln(1).x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n$,

d'où le résultat.

c. Montrons que la série entière converge uniformément sur [0,1[.

Pour cela : $\forall\ x \in [0,1[$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n$ est alternée et vérifie le critère spécial (la valeur absolue du terme général décroît vers 0).

Donc : $\forall\ x \in [0,1[$, $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n\right| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right).|x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$,

ce qui entraîne la convergence uniforme de la série sur [0,1[.

De plus, chaque fonction constituant cette série a une limite en 1, et la série de ces limites converge (toujours par exemple avec le critère spécial).

Donc on peut intervertir limite et somme et :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = \frac{1}{2}.\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left((-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n\right) = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

d. En revenant à des sommes partielles, on a :

$$\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ S_{2.N-1} = \sum_{n=1}^{2.N-1} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2.N-1} (-1)^{n+1}.\ln(n+1) - \sum_{n=1}^{2.N-1} (-1)^{n+1}.\ln(n),$$

et en séparant termes pairs et impairs :

$$S_{2.N-1} = \sum_{p=1}^{N} \ln(2.p) - \sum_{p=1}^{N} \ln(2.p-1) + \sum_{p=1}^{N-1} \ln(2.p) - \sum_{p=1}^{N} \ln(2.p-1) = 2.\ln\left(\frac{2.4...(2.N)}{1.3...(2.N-1)}\right) - \ln(2.N),$$

puis : $S_{2.N-1} = 2.\ln\left(\frac{2^{2.N}.N!^2}{(2.N)!.\sqrt{2.N}}\right)$, et donc : $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = \frac{1}{2}.2.\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

33. a. Pour : $|x| < R$, on peut calculer :

$$(1-x).\sum_{k=0}^{n} S_k.x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k.x^k - \sum_{k=0}^{n} S_k.x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k.x^k - \sum_{k=1}^{n+1} S_{k-1}.x^k = S_0 - S_n.x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k.x^k,$$

et donc : $S_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k.x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k.x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k = (1-x).\sum_{k=0}^{n} S_k.x^k + x.S_n.x^n$.

Mais puisque : $|x| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} S_n.x^n$ converge, et en particulier ($S_n.x^n$) tend vers 0.

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$ a une limite finie quand n tend vers +∞ qui vaut : $(1-x).\sum_{k=0}^{+\infty} S_k.x^k + 0$,

et la série $\sum_{n\geq 10} a_n.x^n$ converge.

Donc: $[0, R[\subset [0,1]$, et : $R \leq 1$.

b. Pour : $|x| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ est absolument convergente, donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ |S_n.x^n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k.x^n\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k.x^n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k.x^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k.x^k|,$$

puisqu'on a en particulier : $\forall\ k \leq n$, $|x|^n \leq |x|^k$, et la suite ($S_n.x^n$) est bien bornée.

Le lemme d'Abel permet d'en déduire que : $[0,1[\subset [0, R]$, et: $1 \leq R$.

c. Par double inégalité, on en déduit que : $R = 1$.

d. La question a. répond à cette question, puisque (comme : $R = 1$), on avait aussi :

$$\forall\ |x| < 1,\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k = (1-x).\sum_{k=0}^{+\infty} S_k.x^k, \text{ soit : } S(x) = (1-x).f(x).$$

34. On calcule facilement : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = P'(x).e^{P(x)}$, et : $f''(x) = (P''(x) + P'(x)^2).e^{P(x)}$.

Si on suppose que : $P'(x_0) = 0$, alors : $f''(x_0) = (P''(x_0) + P'(x_0)^2).e^{P(x_0)} = P''(x_0).e^{P(x_0)}$.

Or si tous les coefficients du développement en série entière de f sont positifs ou nuls, ceux de f'' le sont aussi, puisqu'ils s'en déduisent par des produits par des nombres entiers positifs.

Donc x_0 étant positif, on a : $f''(x_0) \geq 0$, donc : $P''(x_0) = f''(x_0).e^{-P(x_0)} \geq 0$.

Utilisation de séries entières.

35. a. Le développement en série entière de $\arctan$ s'obtient en primitivant celui de sa dérivée et :

$$\forall\ x \in]-1,+1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n+1}}{2.n+1}.$$

b. Notons : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [-1,+1]$, $u_n(x) = (-1)^n.\dfrac{x^{2.n+1}}{2.n+1}$.

- chaque fonction u_n est continue (donc continue par morceaux) sur [0,1[, intégrable sur [0,1[car elle l'est sur [0,1], étant continue sur ce segment,
- la série de fonctions converge simplement sur [0,1[(vers arctan(x)),
- la fonction somme de cette série est continue par morceaux (car continue) sur [0,1[,
- de plus : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_n(x)|.dx = \dfrac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}$,

et la série : $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |u_n(x)|.dx = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}$, est convergente.

Donc le théorème de convergence dominée permet d'intervertir somme et intégrale et :

$$\int_0^1 \arctan(x).dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n+1).(2.n+2)}.$$

c. Puisque la série qui apparaît vérifie par évidence le critère spécial des séries alternées, il suffit que son reste soit inférieur à 10^{-3} pour fournir la valeur cherchée.

Pour cela, il suffit que : $\frac{1}{(2.n+3).(2.n+4)} \leq 10^{-3}$, et la valeur : $n = 15$, convient.

Donc : $\sum_{n=0}^{15} \frac{(-1)^n}{(2.n+1).(2.n+2)} = \frac{63299647353199}{144403552893600} \approx 0.4383524234$, correspond à la valeur cherchée.

36. a. La fonction : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$, admet un développement en série entière sur]-1,+1[, donc S, comme primitive de cette fonction s'annulant en 0, admet aussi un développement en série entière sur]-1,+1[.
Ce développement s'obtient à partir de : ∀ t ∈]-1,+1[, et :

$$\forall\ x \in]-1,+1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}.$$

Quand x tend vers 1, $S(x)$ admet une limite finie si et seulement si $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ converge.

Or la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur [0,1[, et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2).(1+t)}}.\frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

la fonction équivalente étant intégrable sur [0,1[.
Donc S admet une limite finie en 1.

b. Montrons maintenant que la série entière se définit et est continue sur [0,1].
Pour cela :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1],\ \left|\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}\right| \leq \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{1}{4.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}.\sqrt{4.\pi.n}}{2^{2.n}.n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\pi.n.4.n} = \frac{1}{4.\sqrt{\pi}.n^{\frac{3}{2}}} = \alpha_n.$$

On en déduit que la série entière converge normalement sur [0,1], donc qu'elle est définie sur [0,1] et qu'elle y est bien continue, notamment en 1.

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{1}{4.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2.n}{n}}{4^n.(4.n+1)}.$$

37. a. Comme résultat de cours, on a : $\forall\ x \in]-1,+1[,\ \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{2.n+1}}{2.n+1}$.

b. Notons S la série entière qui est apparue : $\forall\ x \in]-1,+1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{2.n+1}}{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1}$.

La formule de Stirling donne alors : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}.\sqrt{4.\pi.n}}{2^{2.n}.[n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}]^2.2.n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.\sqrt{\pi}}.\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Donc la série S converge normalement sur [-1,+1] puisque :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [-1,1],\ |a_n.x^{2.n+1}| \leq |a_n|$,
et la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge, vu l'équivalent qu'on vient de proposer.
De plus tous les monômes qui constituent la série sont continus sur [-1,+1], donc S aussi.
Enfin : $\arcsin(1) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$, le même résultat étant valable en -1 par imparité.
Donc S et $\arcsin$ coïncident sur [-1,+1] et $\arcsin$ est développable en série entière sur [-1,+1].

c. On a évidemment : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t)).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.dt = \frac{\pi^2}{8}$.

Comme de plus on a : $\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(t)| \leq 1$, on peut écrire :

$\forall\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\dfrac{(\sin(t))^{2.n+1}}{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(\sin(t))^{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors normalement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car :

$\forall\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ |u_n(t)| \leq |a_n|$.

Donc on peut intervertir intégrale et série et :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2.n+1}.dt$.

On reconnaît alors les intégrales de Wallis qui valent :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2.n+1}.dt = \dfrac{2^{2.n}n!^2}{(2.n+1)!}$,

et donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\dfrac{2^{2.n}.n!^2}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2.n+1)^2}$.

d. L'égalité des deux quantités obtenues donne finalement : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2.n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

38. a. Il suffit d'utiliser l'expression conjuguée du dénominateur :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{\sin(\theta).e^{i.\theta}}{1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}} = \dfrac{\sin(\theta).e^{i.\theta}.(1 - x.\sin(\theta).e^{-i.\theta})}{\left|1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}\right|^2}$.

Or : $\left|1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}\right|^2 = (1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}).(1 - x.\sin(\theta).e^{-i.\theta}) = 1 - 2.x.\sin(\theta).\cos(\theta) + x^2.\sin^2(\theta)$,

et : $\sin(\theta).e^{i.\theta}.(1 - x.\sin(\theta).e^{-i.\theta}) = (x.\sin(\theta).\cos(\theta) - x^2.\sin^2(\theta)) + i.\sin^2(\theta)$,

donc : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\sin(\theta).e^{i.\theta}}{1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}}\right) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{1 - 2.x.\sin(\theta).\cos(\theta) + x^2.\sin^2(\theta)}$.

b. La présence de l'$\arctan$ incite à dériver la fonction.

On remarque en effet que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (par composition) et que :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(x - \dfrac{1}{\tan(\theta)}\right)^2} = \dfrac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\theta) + (x - \tan(\theta))^2} = \dfrac{\tan^2(\theta)}{\tan^2(\theta) + (x.\tan(\theta) - 1)^2}$,

et on obtient : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{1 - 2.x.\sin(\theta).\cos(\theta) + x^2.\sin^2(\theta)}$.

On écrit ensuite : $\forall\ x \in \left]-\dfrac{1}{\sin(\theta)}, +\dfrac{1}{\sin(\theta)}\right[,\ \left|x.\sin(\theta).e^{i.\theta}\right| < 1$,

et à l'aide d'une série géométrique : $\dfrac{\sin(\theta).e^{i.\theta}}{1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}} = \sin(\theta).e^{i.\theta}.\sum_{n=0}^{+\infty} (x.\sin(\theta).e^{i.\theta})^n$,

ce qui se réécrit en : $\dfrac{\sin(\theta).e^{i.\theta}}{1 - x.\sin(\theta).e^{i.\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^{n+1}(\theta).e^{i.(n+1)\theta}.x^n$.

Et comme $f'(x)$ correspond à la partie imaginaire de cette expression, on en déduit que :

$\forall\ x \in \left]-\dfrac{1}{\sin(\theta)}, +\dfrac{1}{\sin(\theta)}\right[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^{2.(n+1)}(\theta).x^n$.

Enfin, une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence donc :

$\forall\ x \in \left]-\dfrac{1}{\sin(\theta)}, +\dfrac{1}{\sin(\theta)}\right[,\ f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^{2.(n+1)}(\theta).\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Comme de plus : $f(0)=\arctan\left(-\dfrac{1}{\tan(\alpha)}\right)=-\arctan\left(\dfrac{1}{\tan(\alpha)}\right)=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan(\tan(\alpha))\right)=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$,

on conclut que : $\forall\ x\in\left]-\dfrac{1}{\sin(\theta)},+\dfrac{1}{\sin(\theta)}\right[$, $f(x)=\alpha-\dfrac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin^{2.(n+1)}(\theta).\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

39. a. Si P est le polynôme nul, la série entière a un rayon de convergence infini.
Sinon : $P(n)\underset{+\infty}{\sim}a.n^k$, où : $a\neq 0$, et : $k=\deg(P)$.

Comme de plus P n'admet qu'un nombre fini de racines dans ℂ, il existe une valeur n_0, à partir de laquelle P ne s'annule pas.

Donc : $\forall\ x\in$ ℝ*, $\forall\ n\geq n_0$ $\left|\dfrac{P(n+1).x^{n+1}}{P(n).x^n}\right|\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{a.(n+1)^k}{a.n^k}.|x|=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k.|x|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|$.

Donc : $R=1$.

b. La famille proposée est libre car étagée en degrés.
D'autre part, il est clair que, pour tout : $n\in$ ℕ, la famille ($P_0, P_1, P_2,..., P_n$) est une base de ℂn[X] (car libre et de cardinal $n+1$).
Donc tout polynôme de ℂ[X] peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes de la famille de départ, et la famille est génératrice de ℂ[X].
Donc ($P_0, P_1, P_2,..., P_n,...$)) forme bien une base de ℂ[X].

c. Si on suppose que P a été décomposé dans la base précédente : $P=\sum_{k=0}^{N}a_k.P_k$, alors :

$$\forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}P(n).x^n=\sum_{k=0}^{N}a_k.\sum_{n=0}^{+\infty}P_k(n).x^n,$$

car chaque série a un rayon de convergence 1 et donc converge en x.
Puis :

$$\forall\ k\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}P_k(n).x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n.(n-1)...(n-k+1).x^n=x^k.\sum_{n=k}^{+\infty}n.(n-1)...(n-k+1).x^{n-k},$$

et on reconnaît une série entière dérivée : $\sum_{n=0}^{+\infty}P_k(n).x^n=x^k.\dfrac{d^k}{dx^k}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{x^k.k!}{(1-x)^{k+1}}$.

On en déduit que : $\forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}P(n).x^n=\sum_{k=0}^{N}a_k.\dfrac{x^k.k!}{(1-x)^{k+1}}$,

que l'on peut encore au besoin réduire au même dénominateur (à savoir $(1-x)^{N+1}$) en :

$$\forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}P(n).x^n=\frac{1}{(1-x)^{N+1}}.\sum_{k=0}^{N}a_k.k!.x^k.k!.(1-x)^{N-k},$$

ce qui donne bien le résultat voulu avec : $Q=\sum_{k=0}^{N}a_k.k!.X^k.(1-X)^{N-k}$.

d. On veut en fait décomposer P dans la base précédente, et pour cela (on suppose P non nul) :
(0) faire : $k=0$,
(1) si : $P\neq 0$,
(2) diviser P par $X-k$ et noter P le quotient et a_k le reste,
(3) faire : $k=k+1$ et recommencer à (1),
(4) faire : $N=k-1$, et calculer : $\dfrac{1}{(1-x)^{N+1}}.\sum_{k=0}^{N}a_k.k!.x^k.(1-x)^{N-k}$,
(5) fin de l'algorithme.

e. Si on considère la première série entière, on obtient (en remplaçant X par n) :
$n^2+n+1=n.(n+1)+1$, et : $a_0=1$,
$n+1=1.(n-1)+2$, et : $a_1=2$,

$1 = 0.(n-2)+1$, et : $a_2 = 1$.

Puis on a bien : $n^2+n+1 = a_0.P_0(n)+a_1.P_1(n)+a_2.P_2(n) = 1+2.n+1.n.(n-1)$, et :

$$\forall\ x \in]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1).x^n = \frac{1}{(1-x)^{2+1}}.[1.x^0.0!.(1-x)^2+2.x.1!.(1-x)+1.x^2.2!] = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}.$$

Pour la deuxième, on obtient de même :

$n^3 = n.(n-1).(n-2)+3.n.(n-1)+1.n$, et :

$$\forall\ x \in]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}n^3.x^n = \frac{1}{(1-x)^{3+1}}.[1.x^1.1!.(1-x)^2+3.x^2.2!.(1-x)+1.x^3.3!] = \frac{x^3+4.x^2+x}{(1-x)^4}.$$

40. a. La fonction f admet une limite (pour x non nul) en 0 qui est 0.

Donc f est continue en 0.

f est par ailleurs de classe C^1 sur ℝ* et : $\forall\ x \in$ ℝ*, $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Le théorème de croissances comparées montre alors que : $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.

Donc le théorème de dérivabilité par limite de la dérivée montre que la fonction f est dérivable en 0, qu'on a : $f'(0)=0$, et que f' est continue en 0.

f est donc de classe C^1 sur ℝ.

b. Par opérations, f est de classe C^∞ sur ℝ*.

De plus on montre par récurrence que : $\forall\ n \in$ ℕ, $\exists\ P_n \in$ ℝ[X], $\forall\ x \in$ ℝ*, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3.n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

En effet, ce résultat est vrai pour : $n=0$, avec : $P_0 = 1$,

et si on le suppose vrai pour un entier : $n \geq 0$, alors :

$$\forall\ x \in ℝ^*,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)..x^{3.n} - P_n(x).3.n.x^{3.n-1}}{x^{6.n}} + \frac{2.P_n(x)}{x^{3.n+3}}\right).e^{-\frac{1}{x^2}},$$

soit : $\forall\ x \in$ ℝ*, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)..x^3 - 3.n.P_n(x).x^2 + 2.P_n(x)}{x^{3.n+3}}.e^{-\frac{1}{x^2}}$

autrement dit ce que l'on cherche en posant : $P_{n+1} = P_n'..X^3 - 3.n.P_n.X^2 + 2.P_n$.

c. Toujours par récurrence, f est alors de classe C^n sur ℝ pour tout entier : $n \geq 0$, et : $f^{(n)}(0)=0$.

En effet, l'affirmation est vrai pour : $n=0$, et si on la suppose vraie pour : $n \geq 0$, alors le théorème des croissances comparées montre à nouveau que : $\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{3.n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}}\right).P_{n+1}(0) = 0$.

Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, on a : $f^{(n)}{}'(0) = f^{(n+1)}(0) = 0$, et $f^{(n+1)}$ est continue en 0.

Finalement f est de classe C^∞ sur ℝ.

d. On vient de constater que toutes les dérivées de f s'annulent en 0, donc la série de Taylor de f en 0 est la série entière nulle.

e. f est de classe C^∞ sur ℝ, sa série de Taylor a un rayon de convergence infini, mais elle est nulle alors que f n'est nulle qu'en 0.

Autrement dit f ne coïncide avec sa série de Taylor qu'en 0 et f n'est donc pas développable en série entière en 0.

41. a. Pour la première série entière, on remarque que :

- $\forall\ \theta \in$ ℝ, $\forall\ n \in$ ℕ, $|\cos(n.\theta)| \leq 1$, donc : $R_c \geq 1$,
- $\forall\ \theta \in$ ℝ, $(\cos(n.\theta))$ ne tend pas vers 0, d'où divergence de la série en 1, et : $R_c \leq 1$.

Donc : $R_c = 1$.

Pour la deuxième série entière, on distingue deux cas :

- si : $\theta \neq 0\ (\pi)$, les mêmes argument donnent le même résultat et : $R_s = 1$,
- si : $\theta = 0\ (\pi)$, la série est la série nulle et : $R_s = +\infty$.

b. Les trois séries numériques $\sum_{n\geq 0} \cos(n.\theta).x^n$, $\sum_{n\geq 1} \cos(n.\theta).x^n$ et $\sum_{n\geq 1} \cos(n.\theta).x^{n-1}$ convergent pour les mêmes valeurs de x.
Donc la troisième a un rayon de convergence égal à 1, comme toutes les séries entières, primitives de cette série entière, en particulier $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.x^n$.
Le rayon de convergence de cette nouvelle série entière est donc encore égal à 1.
Pour la série entière de in s, on a le même résultat, avec la même distinction de cas que dans la question a., à savoir :
- si : $\theta \neq 0\ (\pi)$, la série entière, comme primitive, a un rayon de convergence égal à 1.
- si : $\theta = 0\ (\pi)$, la série entière est la série nulle et son rayon de convergence est infini,

c. On va donc raisonner pour : $|z| < 1$, en notant qu'alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.\rho^n + i.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n.\theta)}{n}.\rho^n$.

Or : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n = \frac{x.e^{i.\theta}}{1-x.e^{i.\theta}} = \frac{x.e^{i.\theta} - x^2}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}$, d'où :

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n.\theta).x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n\right) = \frac{x.\cos(\theta) - x^2}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}$, et :
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n.\theta).x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n\right) = \frac{x.\sin(\theta)}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}$.

Puis : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n.\theta).x^{n-1} = \frac{\cos(\theta) - x}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}$, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n.\theta).x^{n-1} = \frac{\sin(\theta)}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}$.

Il suffit alors d'intégrer ces deux expressions pour obtenir le résultat voulu, et pour cela :

$\int \frac{\cos(\theta) - x}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}.dx = -\frac{1}{2}.\int \frac{2.x - 2.\cos(\theta)}{x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1}.dx = -\frac{1}{2}.\ln(1-2.x.\cos(\theta)+x^2) + C$, et :

$\int \frac{\sin(\theta)}{1-2.x.\cos(\theta)+x^2}.dx = \int \frac{\sin(\theta)}{(x-\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)}.dx = \arctan\left(\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C'$, ceci pour : $\theta \neq 0\ (\pi)$.

On calcule C et C' à l'aide des valeurs des séries entières en 0 (qui s'annulent dans les deux cas).
On en déduit que : $C = 0$, et : $C' = \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$,
C' peut se simplifier, suivant l'intervalle où se trouve θ.
Finalement :

- si : $\theta \neq 0\ (\pi)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\frac{1}{2}.\ln(1-2.\rho.\cos(\theta)+\rho^2) + i.\left(\arctan\left(\frac{\rho - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right)$,
- si : $\theta = 0\ (\pi)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-\rho) = -\ln(1-z)$, puisqu'alors z est réel.