Séries entières (corrigé niveau 1).

Calcul de rayons de convergence.

1. a. On commence par poser : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(3.n)!}{(n!)^3.n^n}.x^n$, et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(3.n+3)!}{(3.n)!}.\frac{(n!)^3}{(n+1)!^3}.\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.|x| = \frac{(3.n+3).(3.n+2).(3n.+1)}{(n+1)^3}.\frac{1}{n+1}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.|x|.$$

Les trois termes tendent respectivement vers 27, 0, et $\dfrac{1}{e}$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$.

Donc la série numérique converge pour tout x suivant la règle de d'Alembert et : $R = +\infty$.

b. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $u_n = \dfrac{n^4+n}{2^n+\sqrt{n!}}.x^n$, et on remarque que : $\dfrac{n^4+n}{2^n+\sqrt{n!}}.x^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^4}{\sqrt{n!}}.x^n$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)^4}{n^4}.\dfrac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}.|x| = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4.\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}.|x|$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$.

Donc la série numérique converge pour tout x, et : $R = +\infty$.

c. On pose de même : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $u_n = (\sqrt[3]{n})^{2.n}.x^n$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{(\sqrt[3]{n+1})^{2.n+2}}{(\sqrt[3]{n})^{2.n}}.|x| = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{2.n}{3}}.\sqrt[3]{n+1}.|x|$,

et comme la première parenthèse tend vers $e^{\frac{2}{3}}$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$.

La série numérique ne converge donc jamais, si : $x \neq 0$, et : $R = 0$.

d. Pour : $n \in \mathbb{N}$, et : $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{x^{3.n}}{n^2+1}$,

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{(n+1)^2+1}{n^2+1}.|x|^3$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|^3$.

Donc la série converge absolument pour : $|x| < 1$, et diverge grossièrement pour : $|x| > 1$.

On en déduit que : $R = 1$, puisque c'est la valeur charnière entre absolue convergence de la série et divergence grossière.

e. Pour : $n \in \mathbb{N}$, et : $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{3^n}{4^n+n}.x^{4.n}$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{3^{n+1}.(4^n+n)}{3^n.(4^{n+1}+n+1)}.|x|^4$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{3}{4}.|x|^4$.

Donc la série converge absolument pour : $|x| < \sqrt{\dfrac{4}{3}}$, et diverge grossièrement pour : $|x| > \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

On en déduit que : $R = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$, puisque c'est la valeur charnière entre absolue convergence de la série et divergence grossière.

f. Pour : $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{x^{2^n}}{3^n+1}$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)}.|x|^{2^{n+1}-2^n}$, et si :

- $|x| < 1$, la quantité précédente tend vers : 0 < 1, et la série converge absolument,

- $|x|=1$, la quantité précédente tend vers : $\frac{1}{3}<1$, et la série converge absolument,
- $|x|>1$, la quantité précédente tend vers +∞, et la série diverge grossièrement.

On en déduit que : $R=1$, puisque c'est la valeur charnière entre absolue convergence de la série et divergence grossière.

2. a. On commence par utiliser un développement limité pour écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}=n.\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-n.\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=n.\left[1+\frac{1}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{2}+o_{+\infty}(1).$$

Donc le terme général est equivalent à $\frac{1}{2}$ en +∞, et la série entière a même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}.x^n$, c'est à dire 1.

b. On utilise là encore un développement limité avec :

$$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}.\left(1+\frac{1}{2.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\text{ et :}$$

$$e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}=e^{\sqrt{n}}.\left(e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1\right)=e^{\sqrt{n}}.\left(\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{\sqrt{n}}}{2.\sqrt{n}}.$$

Puis, en notant : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{e^{\sqrt{n}}}{2.\sqrt{n}}.x^n$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}.\frac{2.\sqrt{n}}{2.\sqrt{n+1}}.|x|$.

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$, donc : $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|$.

Donc le rayon de convergence de cette série vaut 1.

c. De même : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+3.n+1}=n.\left(1+\frac{3}{2.n}+\frac{1}{2.n^2}-\frac{9}{8.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=n+\frac{3}{2}-\frac{5}{8.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$,

et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \tan(\pi.\sqrt{n^2+3.n+1}).x^n=\tan\left(n.\pi+\frac{3.\pi}{2}-\frac{5.\pi}{8.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right).x^n=\frac{1}{\tan\left(\frac{5.\pi}{8.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.x^n$,

et donc : $\tan(\pi.\sqrt{n^2+3.n+1}).x^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{8.n}{5.\pi}.x^n$.

La règle de d'Alembert montre alors que le rayon de convergence de la série est 1.

3. La valeur z_0 n'est pas à l'intérieur du disque de convergence puisque dans cette zone, il y a absolue convergence de la série entière.
De même, z_0 ne peut être à l'extérieur du disque fermé de convergence puisque dans cette zone, il y a divergence grossière de la série.
Donc z_0 est au bord du disque et le rayon du disque vaut : $R=|z_0|$.

4. Notons R_λ le rayon de convergence de la nouvelle série entière.
Pour : $|\lambda.z|<R$, alors la série $\sum a_n.(\lambda.z)^n$ est absolument convergente, donc : $|z|\leq R_\lambda$.
On en déduit que : $\left[0,\frac{R}{|\lambda|}\right[\subset[0,R_\lambda]$, et : $\frac{R}{|\lambda|}\leq R_\lambda$.
De même, pour : $|z|<R_\lambda$, alors la série $\sum\lambda^n.a_n.z^n$ est absolument convergente, donc : $|\lambda.z|\leq R$.

On en déduit de même que : $[0,R_\lambda]\subset\left[0,\frac{R}{|\lambda|}\right[$, et : $R_\lambda\le\frac{R}{|\lambda|}$.

Finalement : $R_\lambda=\frac{R}{|\lambda|}$.

5. Tout d'abord, pour tout complexe z , $\sum a_n.z^n$ est la somme des deux séries $\sum a_{2.p}.z^{2.p}$ et $\sum a_{2.p+1}.z^{2.p+1}$.
   En effet : $\forall\ z\in\mathbb{C}$,
   - $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2.n+1}a_k.z^k=\sum_{p=0}^{n}a_{2.p}.z^{2.p}+\sum_{p=0}^{n}a_{2.p+1}.z^{2.p+1}$, et :
   - $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2.n}a_k.z^k=\sum_{p=0}^{n}a_{2.p}.z^{2.p}+\sum_{p=0}^{n-1}a_{2.p+1}.z^{2.p+1}$.

   Donc si les deux séries « partie paire » et « partie impaire » convergent, alors les deux suites de sommes partielles d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite, ce qui garantit la convergence globale de la série $\sum a_n.z^n$.

   Donc : $\forall\ z\in\mathbb{C}$, ($|z|<R_p$, et : $|z|<R_i$) $\Rightarrow$ ($\sum a_n.z^n$ converge) $\Rightarrow$ ($|z|\le R$),

   soit encore : $\forall\ z\in\mathbb{C}$, ($|z|<\min(R_p,R_i)\Rightarrow$ ($|z|\le R$),

   et donc : $\min(R_p,R_i)\le R$.

   Soit maintenant : $z\in\mathbb{C}$, tel que : $|z|<R$.

   Alors $\sum a_n.z^n$ converge ainsi que $\sum a_n.(-z)^n$, donc leur somme converge aussi.

   Or elle vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.(1+(-1)^n).z^n=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2.p}.z^{2.p}$,

   et donc puisque cette dernière série converge, on a : $|z|\le R_p$.

   Avec la différence, on a de même : $|z|\le R_i$,

   soit donc : $|z|\le\min(R_p,R_i)$.

   On en déduit que : $R\le\min(R_p,R_i)$, et finalement : $R=\min(R_p,R_i)$.

6. a. On constate immédiatement que : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $|\cos(n)|\le 1$, donc le rayon de convergence de la série entière est supérieur à celui de la série $\sum z^n$, donc : $R\ge 1$.
   b. Supposons que la suite ($\cos(n)$) converge vers 0.
   Alors : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\cos(n+1)=\cos(n).\cos(1)-\sin(n).\sin(1)$, et : $\sin(n)=\frac{\cos(n).\cos(1)-\cos(n+1)}{\sin(1)}$,
   ce qui montre que la suite ($\sin(n)$) tend aussi vers 0.
   Or c'est impossible puisque : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\sin^2(n)+\cos^2(n)=1$.
   c. On vient donc d'établir que la série entière était divergente pour : $x=1$, et donc : $R\le 1$.
   Finalement : $R=1$.
   d. Il y a divergence grossière en 1, donc aussi en : $z\in\mathbb{C}$, tel que : $|z|=1$, car pour un tel z , on a :
   $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $|\cos(n).z^n|=|\cos(n)|$, et cette suite ne tend pas vers 0.
   La série entière diverge donc en tout point du bord du disque de convergence.

Propriété de sommes de séries entières.

7. a. Le rayon de convergence de la série entière est donné par la règle de d'Alembert et il vaut 1.
   De plus, en : $x=\pm 1$, la série est absolument convergente, donc elle y est convergente.
   Finalement : $\mathscr{D}_S$ = [-1,+1].

b. On constate que les théorèmes classiques ne donnent rien sur l'intervalle fermé.
Néanmoins, on remarque que tous les monômes de la série sont des fonctions continues sur [-1,+1].
Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in$ [-1,+1], $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2} = \alpha_n$,
et la convergence de $\sum \alpha_n$ donne la convergence normale de la série de fonctions sur [-1,+1].
Donc S est continue sur [-1,+1].

c. Les théorèmes classiques montrent que S est de classe C$^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence qui est ici]-1,+1[, puisque le rayon de convergence de la série vaut 1.

d. Pour montrer que S est dérivable en -1, on constate que :
- la série de fonctions converge simplement sur [-1,0],
- toutes les fonctions de la série sont de classe C^1 sur [-1,0],
- la série des dérivées converge uniformément sur [-1,0] car :

$\forall\ x \in$ [-1,0], la série des dérivées en x, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^{n-1}}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ S \in$ [-1,0], $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k}\right| \leq \left|\dfrac{x^n}{n+1}\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$,

ce qui garantit la convergence uniforme annoncée.

Donc S est dérivable en -1, et : $S'(-1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

8. a. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence de la série entière qui est 1.
Pour : $x = 1$, la série entière diverge comme série de Riemann divergente.
Pour : $x = -1$, la série est alternée et vérifie le critère spécial puisque :
- la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, est alternée,
- la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, tend vers 0 en décroissant.

Donc la série entière converge en -1, et finalement : $\mathscr{D}_S$ = [-1,+1[.

b. S est continue sur]-1,+1[comme série entière.
Puis pour : $S \in$ [-1,0], la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est convergente et vérifie le critère spécial des séries alternées,
donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{\sqrt{k}}\right| \leq \left|\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,
ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions sur [-1,0].
Comme de plus tous les monômes constituant la série sont des fonctions continues sur [-1,0], la somme de la série (c'est-à-dire S), est continue sur [-1,0], et donc finalement sur [-1,+1[.

c. Pour : $0 \leq x < 1$, on a : $(1-x).S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n}}$, soit :

$$(1-x).S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n-1}} = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right].x^n .$$

d. La dernière série (entière) qui apparaît converge normalement sur [0,1], car :

$\forall\ x \in$ [0,1], $\forall\ n \geq 2$, $\left|\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right].x^n\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

La série majorante étant télescopique et convergente, on en déduit bien que la nouvelle série entière (notons S_1 sa somme) converge normalement sur [0,1], et donc y est continue, en particulier en 1.

Finalement : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (1-x).S(x) = 1 + \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} S_1(x) = 1 + S_1(1) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(1-x).S(x) = 1+\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = 1-1 = 0$.

9. a. Pour : $(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq 1$, on a : $I(p,q) = \int_0^1 t^p.(1-t)^q.dt = \left[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}.(1-t)^q\right]_0^1 + \dfrac{q}{p+1}.\int_0^1 t^{p+1}.(1-t)^{q-1}.dt$.

Donc : $I(p,q) = \dfrac{q}{p+1}.I(p+1,q-1)$, et par récurrence :

$$I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)...(p+q)}.I(p+q,0) = \frac{q!}{(p+1)...(p+q)}.\int_0^1 t^{p+q}.dt = \frac{q!}{(p+1)...(p+q+1)} = \frac{p!.q!}{(p+q+1)!},$$

formule valable aussi pour : $q = 0$.

b. On a donc en particulier : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = I(n,n) = \dfrac{n!^2}{(2.n+1)!}$.

Soit maintenant : $x \in \mathbb{R}^*$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n.x^n$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{(2.n+1)!}{(2.n+3)!}.\dfrac{(n+1)!^2}{n!^2}.|x| = \dfrac{(n+1)^2}{(2.n+3).(2.n+2)}.|x|$, qui tend vers $\dfrac{|x|}{4}$.

Donc en application classique de la règle de d'Alembert, la valeur charnière entre absolue convergence et divergence est 4 et le rayon de convergence de la série entière proposée est : $R = 4$.

c. La formule de Stirling montre que : $\dfrac{n!^2}{(2.n+1)!}.4^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\pi.n.2^{2.n}}{(2.n+1)^{2.n+1}.e^{-2.n-1}.\sqrt{2.\pi.(2.n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{n}}$,

et donc la série diverge en 4, puisqu'à termes positifs.
En -4, la série numérique est alternée et son terme général tend vers 0 (avec l'équivalent précédent).
De plus, avec la notation de la question b., pour : $x = -4$, on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\frac{4.(n+1)^2}{(2.n+3).(2.n+2)} = \frac{(2.n+2)}{(2.n+3)} < 1,$$

et la série vérifie donc le critère spécial des séries alternées : elle est donc convergente.
Finalement : $\mathcal{D}_S$ = [-4,+4[.

10. a. Notons M un majorant de $|S|$ sur]-1,+1[.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1[,\ 0 \leq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.x^k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k = S(x) \leq M$,

la première majoration venant du fait que les a_k sont positifs.

Puis il est possible de faire tendre x vers 1 (dans la somme partielle) et on en déduit que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq M.$$

Enfin, la série $\sum a_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge.

b. La fonction S, comme somme (même infinie) de fonctions croissantes, est croissante sur [0,1[.
De plus S est majorée.
Donc S admet une limite finie en 1 qu'on notera L et qui vérifie : $\forall\ x \in [0,1[,\ S(x) \leq \lim\limits_{1} S = L$.

c. On peut écrire : $\forall\ x \in [0,1[,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.x^k \leq S(x) \leq L$,

donc quand x tend vers 1, on en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leq L$,

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leq L$.

D'autre part : $\forall\ x \in [0,1[,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n.x^n \leq a_n$, et puisque les deux séries sont convergentes, on peut sommer pour n variant de 0 à $+\infty$ et :

$\forall\ x \in [0,1[,\ S(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Enfin, on peut faire tendre à nouveau x vers 1 pour obtenir : $L \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Finalement, par double inégalité que : $L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Utilisation de séries entières.

11\. a. Pour tout x dans ℝ, on a : $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$,

d'où : $1-\cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$,

et : $\forall\ x \in$ ℝ*, $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2.n-2}}{(2.n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2.n}}{(2.n+2)!}$.

Enfin, cette égalité est encore vérifiée pour : $x = 0$, donc elle est vérifiée sur ℝ et f est bien développable en série entière sur ℝ.

b. Puisque f coïncide sur ℝ avec une série entière (de rayon de convergence infini), f est donc de classe C^∞ sur ℝ.

c. On sait qu'une série entière se primitive terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc ici sur ℝ et en notant F la primitive de f qui s'annule en 0, on a donc :

$\forall\ x \in$ ℝ, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2.n+1}}{(2.n+2)!.(2.n+1)}$,

puisque la série proposée s'annule bien en 0.

12\. a. On sait que $f\ :\ t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$, est définie et continue sur ℝ*.

Donc puisque pour tout : $x \in$ ℝ*, le segment d'extrémités x et $2.x$ est inclus dans ℝ* et l'intégrale de f sur ce segment est donc définie.

F est donc définie sur ℝ*. par : $\forall\ x \in$ ℝ*, $F(x) = \int_x^{2.x} \frac{\cos(t)}{t}.dt$.

b. Par ailleurs : $\forall$ t $\in$ ℝ*, $s(t) = \frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.t^{2.n} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.t^{2.n-1} = \frac{1}{t} + s_1(t)$,

où on a posé : $\forall$ t $\in$ ℝ*, $s_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.t^{2.n-1}$.

Or la série entière définissant S_1 a un rayon de convergence infini (comme $\cos$) donc admet des primitives sur ℝ obtenues en intégrant terme à terme.

En notant S_1 une telle primitive, on peut donc écrire :

$\forall$ x $\in$ ℝ*, $F(x) = \int_x^{2.x} s(t).dt = \int_x^{2.x} \left(\frac{1}{t} + s_1(t)\right).dt = [\ln(|t|) + S_1(t)]_x^{2.x} = \ln(2) + S_1(2.x) - S_1(x)$,

et donc : $F(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.\frac{(2.x)^{2.n}}{2.n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.\frac{x^{2.n}}{2.n} = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n)!}.\frac{2^{2.n}-1}{2.n}.x^{2.n}$.

La série entière qui apparaît a même rayon de convergence que les précédentes et est définie sur ℝ.
En particulier :

- elle est continue en 0, donc F a une limite fini en 0 qui vaut : $\lim_{x\to 0} F(x) = \ln(2) + 0 = \ln(2)$.
- en posant : $F(0) = \ln(2)$, la fonction F ainsi prolongée coïncide avec une série entière sur ℝ, donc est de classe C^∞ sur ℝ. $F(0)$.

13. a. Pour : t $\in$ [0,1[, et : $a>0$, on a : $\left|-t^a\right|<1$, et donc : $\dfrac{1}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.t^{a.n}$.

b. Notons : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $u_n(t)=(-1)^n.t^{a.n}$.

La série de fonctions converge normalement sur tout segment $[0,x]$, pour : $0\le x<1$.

En effet : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\forall$ t $\in[0,x]$, $|u_n(t)|=\left|t^a\right|^n\le\left|x^a\right|^n$,

et comme : $0\le|x|^a<1$, la série majorante est bien convergente.

Donc : $\forall\ x\in$ [0,1[, $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n.t^{a.n}.dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+a.n}.x^{a.n+1}$.

On constate bien que la fonction proposée admet une primitive sur [0,1[qui s'exprime sous forme de série de fonctions.

Montrons maintenant que cette série de fonctions (qu'on notera $\sum_{n\ge0}v_n$) est en fait définie sur [0,1] et qu'elle y converge uniformément.

Pour cela, pour tout : $x\in$ [0,1], la série $\sum_{n\ge0}v_n(x)$, est alternée et vérifie le critère spécial car :

- la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{1+a.n}.x^{a.n+1}\right)$, est alternée et tend vers 0 (car : $a>0$, et : $0\le x^a\le1$),
- la suite $\left(\dfrac{x^{a.n+1}}{1+a.n}\right)$, est décroissante comme le produit de deux suites positives décroissantes.

Donc : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\forall\ x\in$ [0,1], $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+a.k}.x^{a.k+1}\right|\le\frac{x^{a.(n+1)+1}}{1+a.(n+1)}\le\frac{1}{1+a.(n+1)}$,

ce qui garantit que la série converge uniformément sur [0,1] (donc en particulier simplement).

c. Notons : $\forall$ t $\in$ [0,1[, $f(t)=\dfrac{1}{1+t^a}$, et F la primitive précédente, définie sur [0,1].

Alors : $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\int_0^x\frac{dt}{1+t^a}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}F(x)=F(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n.a}$.

d. On applique le résultat précédent pour : $a=1,2,3$, et :

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=[\ln(1+t)]_0^1=\ln(2)$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2.n+1}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=[\arctan(t)]_0^1=\frac{\pi}{4}$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3.n+1}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}$.

On utilise alors une décomposition en éléments simples et :

$\forall$ t $\in$ [0,1], $\displaystyle\frac{1}{1+t^3}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1+t}-\frac{1}{3}.\frac{t-2}{t^2-t+1}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1+t}-\frac{1}{6}.\frac{2.t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

On peut ainsi primitiver et obtenir : $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}.\ln(1+x)-\frac{1}{6}.\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}.(\arctan\left(\frac{2.x-1}{\sqrt3}\right)+\frac{\pi}{6})$.:

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3.n+1}=\frac{1}{3}.\ln(2)+\frac{\pi}{3.\sqrt3}$.

14. a. Puisque : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, les deux séries entières ont même rayon de convergence R.

De plus : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}.\dfrac{n}{x^n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$,

on en déduit classiquement qu'il y a convergence absolue de la série pour : $|x|<1$, et divergence grossière pour : $|x|>1$, en application de la règle de d'Alembert, donc : $R=1$.

De plus : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$,

donc : $\exists\ C \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in]-1,+1[$, $f(x) = -\ln(1-x)+C$,

et comme : $f(0)=0$, on en déduit que : $C=0$, soit finalement : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $f(x) = -\ln(1-x)$.

b. On peut écrire, en rassemblant deux séries convergentes :

$$\forall\ x \in]-R,+R[,\ h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right).x^n .$$

Si on note : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}$, alors : $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{2.n^2}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2.n^2}$.

On en déduit que la série entière h a pour rayon de convergence 1 car c'est le même que celui de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{x^n}{2.n^2}$ (pour laquelle la règle de d'Alembert donne encore un rayon égal à 1).

Et comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ est absolument convergente du fait de l'équivalent trouvé, on en déduit que h est définie en ± 1 donc sur [-1,+1].

c. On peut écrire alors : $\forall\ x \in]0,+1[$, $g(x) = h(x)+f(x) = h(x)-\ln(1-x)$,

soit : $\dfrac{g(x)}{-\ln(1-x)} = 1 - \dfrac{h(x)}{\ln(1-x)}$, et : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{-\ln(1-x)} = 1$, puisque $h(x)$ tend vers la valeur réelle $h(1)$ en 1.

On en déduit que : $g(x) \underset{1}{\sim} -\ln(1-x)$.

d. Reprenons une somme partielle de la série $h(1)$:

$$\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n)) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N+1)-\ln(1)-H_N ,$$

et comme : $H_N = \ln(N)+\gamma+o_{+\infty}(1)$,

on en déduit que : $\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right) = \ln(N+1)-\ln(N)-\gamma+o_{+\infty}(1) = -\gamma+\ln\left(1+\dfrac{1}{N}\right)+o_{+\infty}(1)$,

d'où : $h(1) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right) = -\gamma$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

15. a. On peut commencer par écrire : $\dfrac{x^2+x+3}{x^2-1} = 1+\dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{x+1}$,

et donc : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $\dfrac{x^2+x+3}{x^2-1} = 1-\dfrac{5}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \dfrac{3}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.x^n = -3-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5+3.(-1)^n}{2}x^n$,

et puisque la dernière série diverge pour : $x=\pm 1$, son rayon de convergence est 1 et son intervalle de convergence est]-1,+1[.

b. On commence par déterminer les pôles de la fraction donc on trouve les racines de dénominateur.

Or il a pour discriminant : $\Delta = 4.\cos^2(\theta)-4 = -4.\sin^2(\theta)$.

On est ainsi amener à distinguer les cas suivants :

- Si : $\theta = 0\ (2.\pi)$, la fraction admet 1 comme pôle double et : $\dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Cette fonction est la dérivée de : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Et comme : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

on en déduit en dérivant terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence que :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\dfrac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^n$.

• Si : $\theta = \pi\ (2.\pi)$, la fraction admet -1 comme pôle double et : $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

De la même façon qu'au-dessus, on obtient :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\dfrac{1}{(x+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.(n+1).x^n$.

• Pour les autres valeurs de θ, les pôles de la fraction sont simples et valent : $\cos(\theta) \pm i.\sin(\theta) = e^{\pm i.\theta}$.

La fraction se décompose alors en : $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1} = \dfrac{a}{x - e^{i.\theta}} - \dfrac{b}{x - e^{-i.\theta}}$,

et on détermine a en multipliant par exemple par $x - e^{i.\theta}$ puis en évaluant en $e^{i.\theta}$ après simplification,

on obtient : $a = \dfrac{1}{e^{i.\theta} - e^{-i.\theta}} = \dfrac{1}{2.i.\sin(i.\theta)}$.

On procède de la même façon pour b ou on remarque que : $b = \overline{a}$.

On aboutit ainsi à : $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1} = \dfrac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\left(\dfrac{1}{x - e^{i.\theta}} - \dfrac{1}{x - e^{-i.\theta}}\right)$.

Ensuite : $\forall\ |x| < 1$, $\dfrac{1}{x - e^{i.\theta}} = \dfrac{-1}{e^{i.\theta}}.\dfrac{1}{1 - x.e^{-i.\theta}} = \dfrac{-1}{e^{i.\theta}}.\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.n.\theta} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.(n+1).\theta}$,

puisque dans ce cas on a bien : $\left|x.e^{-i.\theta}\right| = |x| < 1$, qui permet d'utiliser la série géométrique.

De la même façon, on a : $\forall\ |x| < 1$, $\dfrac{1}{x - e^{-i.\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{+i.(n+1).\theta}$,

et donc en rassemblant :

$\forall\ |x| < 1$, $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta)+1} = \dfrac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.(n+1).\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{i.(n+1).\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin((n+1).\theta)}{\sin(\theta)} x^n$.

L'intervalle de convergence est finalement]-1,+1[, car la suite $(\sin((n+1).\theta)$ ne tend pas vers 0.

16. a. Cette première fonction f est définie et dérivable sur ℝ, et : $\forall\ x \in$ ℝ, $f'(x) = \dfrac{2.x+1}{x^2+x+1}$.

On peut alors décomposer en : $\dfrac{2.x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2} = -\dfrac{1}{j}.\dfrac{1}{1-j^2.x} - \dfrac{1}{j^2}.\dfrac{1}{1-j.x}$.

Donc : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $f'(x) = -\dfrac{1}{j}.\sum_{n=0}^{+\infty} (j^2.x)^n - \dfrac{1}{j^2}.\sum_{n=0}^{+\infty} (j.x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (j^{2.n+2} + j^{n+1}).x^n$,

puisque : $|x.j| = \left|x.j^2\right| = |x| < 1$, ce qui permet d'utiliser la série géométrique.

Enfin : $\forall\ n \in$ ℕ, $j^{n+1} + j^{2.n+2} = e^{i.(n+1).\frac{2.\pi}{3}} + e^{-i.(n+1).\frac{2.\pi}{3}} = 2.\cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right)$.

Donc : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $f'(x) = -2.\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right).x^n$,

puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $f(x) = f(0) - 2.\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right).\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = -2.\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right).\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

b. Pour cette fonction g, on a :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $g'(x) = \dfrac{2.\tan(\alpha)}{(1-x)^2 + (1+x)^2.\tan^2(\alpha)} = \dfrac{\sin(2.\alpha)}{x^2 - 2.x.\cos(2.\alpha) + 1}$,

et on distingue deux cas :

- si : $\alpha = 0$, auquel cas la fonction g est nulle,
- si : $\alpha \neq 0$, et avec l'exercice précédent, on peut écrire :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1).2.\alpha)x^n$, soit en primitivant terme à terme :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $g(x) = g(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1).2.\alpha).\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1).2.\alpha).\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

c. La dérivée ici de la fonction h proposée est :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ h'(x) = sh(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x^2)^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4.n+2}}{(2.n+1)!}$.

Donc à nouveau en primitivant terme à terme : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4.n+3}}{(2.n+1)!.(4.n+3)}$.

17. On peut donc linéariser les fonctions proposées :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin^3(x) = \left(\dfrac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2.i}\right)^3 = \dfrac{-1}{8.i}.(e^{3.i.x} - 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x} - e^{-3.i.x}) = \dfrac{3}{4}.\sin(x) - \dfrac{1}{4}.\sin(3.x)$.

On en déduit que :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin^3(x) = \dfrac{3}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!} - \dfrac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{(3.x)^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3^{2.n+1}}{4}\right).\dfrac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}$.

De même : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{i.x} + e^{-i.x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}.(e^{3.i.x} + 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x} + e^{-3.i.x}) = \dfrac{1}{4}.\cos(3.x) + \dfrac{3}{4}.\cos(x)$,

et : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos^3(x) = \dfrac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{(3.x)^{2.n}}{(2.n)!} + \dfrac{3}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{x^{2.n}}{(2.n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\left(\dfrac{3^{2.n}}{4} + \dfrac{3}{4}\right).\dfrac{x^{2.n}}{(2.n)!}$.

18. a. On peut simplement écrire : $\forall\ x \in [-1,+1[,\ f(x) = (1+x).\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. On en déduit que :

$\forall\ x \in\ ]-1,+1[,\ f(x) = (1+x).\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.x^{2.n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.x^{2.n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.x^{2.n+1}$.

En notant : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{2.n} = a_{2.n+1} = \dfrac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}$, et : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$

on a donc : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[,\ f(x) = S(x)$.

On a bien ainsi démontré que f est développable en série entière sur]-1,+1[.

Enfin, on constate que : $a_{2.n} = a_{2.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}.\sqrt{4.\pi.n}}{2^{2.n}.[n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}]^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi.n}}$,

donc pour : $x = -1$, si on note S_n les sommes partielles de la série $S(-1)$ on a :

$\forall\ n \geq 1,\ S_{2.n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2.k}.((-1)^{2.k} + (-1)^{2.k+1}) = 0$, et : $S_{2.n} = S_{2.n-1} + a_{2.n}.(-1)^{2.n} = a_{2.n}$.

Donc les deux suites ($S_{2.n-1}$) et ($S_{2.n}$) tendent vers 0 et la suite globale (S_n) tend vers 0.

Autrement dit S existe en -1, $S(-1) = 0 = f(-1)$, et l'égalité est donc valable sur $[-1,+1[$.

19. a. La suite (a_n) est récurrente linéaire à deux termes.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3.r + 2 = 0$, qui a pour racines 1 et 2.

Donc : $\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=\alpha.1^n+\beta.2^n$.

Comme de plus : $a_0=1=\alpha.1^0+\beta.2^0=\alpha+\beta$, et : $a_1=3=\alpha.1^1+\beta.2^1=\alpha+2.\beta$, on en déduit que : $\alpha=-1,\ \beta=2$, puis : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=2^{n+1}-1$.

b. On a donc : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=2^{n+1}-1$, $\forall\ x\in\mathbb{R},\ \left|\frac{a_n}{n!}.x^n\right|\le 2.\frac{|2.x|^n}{n!}$,

et comme la série majorante converge pour tout réel x, on en déduit que la série proposée aussi et que son rayon de convergence vaut donc $+\infty$.

Puis : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}-1}{n!}.x^n=2.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2.x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=2.e^{2.x}-e^x$,

puisque les deux séries qu'on a fait apparaître sont évidemment convergentes.

c. L'inégalité proposée est vraie pour : $n=0$, et : $n=1$.

Si on la suppose vraie jusqu'à un entier : $n\ge 1$, alors :

$|a_{n+1}|=|3.a_n-2.a_{n-1}|\le 3.|a_n|+2.|a_{n-1}|\le 3.4^n+2.4^{n-1}=4^{n-1}.(3.4+2)=14.4^{n-1}\le 4^{n+1}$,

et donc par récurrence, le résultat est vrai pour tout entier : $n\in\mathbb{N}$.

On en déduit comme dans la question b. que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=2^{n+1}-1$, $\forall\ x\in\mathbb{R},\ \left|\frac{a_n}{n!}.x^n\right|\le\frac{|4.x|^n}{n!}$,

et comme la nouvelle série majorante converge encore pour tout réel x, on en déduit que le rayon de convergence de S est infini.

d. Pour x réel, on multiplie la relation de départ par x^{n+2} ce qui donne :

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}.x^{n+2}=3.x.a_{n+1}.x^{n+1}-2.x^2.a_n.x^n$,

et en sommant de 0 à $+\infty$, on obtient :

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}}{n!}.x^{n+2}=3.x.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}.x^{n+1}-2.x^2.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}.x^n$,

puisque toutes les séries sont convergentes.

Comme de plus :

- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}.x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.(n+1).x^{n+1}=x.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.(n+1).x^n=x.\sum_{n=1}^{+\infty}n.\frac{a_n}{n!}.x^{n-1}=x.S'(x)$, et :
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}}{n!}.x^{n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}}{(n+2)!}.(n+2).(n+1).x^{n+2}=x^2.\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).\frac{a_n}{n!}.x^{n-2}=x^2.S''(x)$,

la relation se réécrit en : $x^2.S''(x)=3.x^2.S'(x)-2.x^2.S(x)$,

et donc : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ S''(x)-3.S'(x)+2.S(x)=0$,

relation qui reste vraie pour : $x=0$, puisque : $S(0)=a_0=1$, $S'(0)=a_1=3$, $S''(0)=a_2=3.a_1-2.a_0$.

e. L'équation différentielle obtenue a pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$\forall\ x\in\mathbb{R},\ y(x)=A.e^x+B.e^{2.x}$, avec : $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Donc : $\exists\,(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\ x\in\mathbb{R},\ S(x)=A.e^x+B.e^{2.x}$.

On termine avec : $S(0)=1=A+B$, et : $S'(0)=3=A+2.B$,

ce qui donne : $A=-1,\ B=2$, et finalement : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ S(x)=2.e^{2.x}-e^x$.

20. a. Pour : $z\in\mathbb{C}$, et : $n\in\mathbb{N}$, on pose : $u_n=\binom{n+p}{p}.z^n$,

et : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(n+p+1)!}{p!.(n+1)!}.\frac{p!.n!}{(n+p)!}.|z|=\frac{n+p+1}{n+1}.|z|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|z|$,

donc la règle de d'Alembert donne un rayon de convergence valant : $R_p=1$ (absolue convergence pour : $|z|<1$, et divergence grossière pour : $|z|>1$).

Enfin, il y a évidemment divergence grossière de la série pour : $|z|=1$, puisque les coefficients binomiaux sont des entiers non nuls.

b. Pour : $x \in \left]-1,+1\right[$, on a : $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\binom{n+p}{p}.x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(n-1)!.p!}.x^{n-1}$,

par dérivation terme à terme, et :

$$(1-x).f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(n-1)!.p!}.x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(n-1)!.p!}.x^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1+p)!}{n!.p!}.x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(n-1)!.p!}.x^{n} ,$$

soit : $(1-x).f_p'(x) = (p+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!.p!}.((n+p+1)-n).x^n = (p+1).\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!.p!}.x^n = (p+1).f_p(x)$.

c. On vient de montrer que f_p est solution sur $\left]-1,+1\right[$ de l'équation différentielle : $(1-x).y'-(p+1).y = 0$.

Donc : $\exists\ C \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \left]-1,+1\right[$, $f_p(x) = C.\exp\left(-\int -\frac{p+1}{1-x}.dx\right) = C.\exp((p+1).\ln(1-x)) = \frac{C}{(1-x)^{p+1}}$.

Comme de plus : $f_p(x) = \binom{p}{p} = 1$, on en déduit que : $C = 1$,

et finalement : $\forall\ x \in \left]-1,+1\right[$, $f_p(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

d. Fixons : $z \in \mathbb{C}$, tel que : $|z| < 1$.

Pour : $p = 0$, on a : $f_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+0}{0}.z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^{0+1}}$.

Supposons l'égalité établie pour un entier : $p \geq 0$, donné.

Alors : $(1-z).f_{p+1}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1}.z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1}.z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1}.z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p}{p+1}.z^n$,

puisque les deux séries convergent, et :

$$(1-z).f_{p+1}(z) = \binom{p+1}{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\binom{n+p+1}{p+1} - \binom{n+p}{p+1}\right).z^n .$$

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n+p}{p} + \binom{n+p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}$,

donc : $(1-z).f_{p+1}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p}{p}.z^n = f_p(z)$,

et on conclut que : $f_{p+1}(z) = \frac{f_p(z)}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$,

ce qui termine la récurrence.

21. a. On commence par calculer le rayon de convergence de la série à l'aide de la règle de d'Alembert, et on obtient : $R = 1$, avec divergence grossière en ± 1.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 1 = n.(n-1) + 2.n + 1$, et:

$$\forall\ |x| < 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1).x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty} n.x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).x^n + 2.\sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n ,$$

puisque toutes les séries que l'on a écrites ont pour rayon de convergence 1.

D'où : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1).x^n = x^2.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2.x.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{1-x}\right)$,

et : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1).x^n = x^2.\frac{2}{(1-x)^3} + 2.x.\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2.x^2 + 2.x.(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)^3}$,

soit finalement : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1).x^n = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}$.

b. On commence à nouveau avec le rayon de convergence, qui vaut encore 1 et il y a à nouveau divergence grossière en ± 1.

Puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+(-1)^n).x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}n.x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.x^n + 1$,

puisqu'une fois de plus, toutes les séries que l'on a écrites ont pour rayon de convergence 1,

et finalement : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+(-1)^n).x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x} + 1$.

c. A nouveau on commence par déterminer le rayon de convergence de la série qui est 1, toujours avec la règle de d'Alembert (et des équivalents), et divergence grossière en ± 1.

Puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right).x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}n.x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = x.\sum_{n=1}^{+\infty}n.x^{n-1} + \ln(1-x)$,

puisque là encore, toutes les séries qui apparaissent ont même rayon de convergence 1,

soit finalement : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right).x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x)$.

d. La règle de d'Alembert donne cette fois un rayon de convergence : $R = \frac{1}{e}$, car : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{ch(n)}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n}$.

Il a de plus divergence en $+\frac{1}{e}$ avec l'équivalent et convergence en $-\frac{1}{e}$ en écrivant :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{ch(n)}{n}.\left(-\frac{1}{e}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2.n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2.n}.e^{-2.n}$,

ce qui fait apparaître deux séries convergentes.

Puis : $\forall\ x \in \left]-\frac{1}{e},+\frac{1}{e}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ch(n)}{n}.x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e.x)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{-1}.x)^n}{n} = -\ln(1-e.x) + \ln(1-e^{-1}.x)$,

puisque : $|e.x| < 1$, et : $|e^{-1}.x| < e^{-2} < 1$, ce qui permet d'utiliser les séries logarithmes,

soit finalement : $\forall\ x \in \left]-\frac{1}{e},+\frac{1}{e}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ch(n)}{n}.x^n = \ln\left(\frac{e-x}{1-e.x}\right) - 1$.

22. a. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence (qui vaut 1) et il y a divergence grossière en ± 1.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{n^2+3.n+4}{n+1} = (n+2) + \frac{2}{n+1}$, d'où :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3.n+4}{n+1}.x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2).x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}n.x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \frac{2}{x}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

car toutes les séries convergent, d'où :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3.n+4}{n+1}.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - 2.\frac{\ln(1-x)}{x}$.

Enfin, pour : $x = 0$, la fonction initiale vaut 4, ce qui correspond à la limite en 0 de la somme trouvée.

b. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (avec la règle de d'Alembert), et il y a absolue convergence en ± 1.

Puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n}$,

car les deux séries convergent, ce qui ensuite donne :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} - x ,$$

et finalement :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = (x+1).\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} - x = (x+1).\ln(1+x) - x$.

Enfin, pour : $x = -1$, la série vaut : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$, soit la limite de la fonction somme précédente en -1.

Et pour : $x=1$, la série vaut : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n.(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{(-1)^n}{n}\right)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}-1=2.\ln(2)-1$,

soit encore la limite de la fonction somme précédente, cette fois en 1.

23. Posons : $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n.(n-1)}$.

Le rayon de convergence de cette série entière s'obtient rapidement avec la règle de d'Alembert et : $R=1$.

Puis : $\forall\ n\geq 2$, $\frac{1}{n.(n-1)}=\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}$,

et : $\forall\ x\in\ ]-1,+1[$, $S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n.(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$,

car les deux nouvelles séries ont même rayon de convergence que la première.

On en déduit que : $\forall\ x\in\ ]-1,+1[$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+x=(x-1).\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+x=-(x-1).\ln(1-x)+x$.

Finalement : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1).2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.(1-\ln(2))$.

Produit de Cauchy.

24. a. La fonction proposée se développe en une série entière de rayon de convergence 1 et valant :

$$\forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.x^n,$$

avec : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $a_n=1$.

b. Il y a absolue convergence de la série précédente pour tout : $x\in\ ]-1,+1[$.

Donc le produit de Cauchy de la série par elle-même est absolument convergent et si on le note :

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n.x^n,$$

alors : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.a_{n-k}=n+1$.

Donc : $S(x)=\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).x^n$.

c. Une série entière étant toujours de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, et ses dérivées s'obtenant en dérivant terme à terme la série entière initiale, on a donc en particulier :

$$\forall\ x\in\ ]-1,+1[,\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}n.x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).x^n,$$

ce qui est bien ce qu'on avait trouvé.

Autour de l'exponentielle complexe.

25. La série exponentielle converge pour tout nombre complexe.

Donc : $\forall(z,N)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}$, $\left|e^z-\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-\sum_{n=0}^{N}\frac{|z|^n}{n!}$.

26. Posons : $z=a+i.b$, avec : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Alors : $(\sin(z)=2)\Leftrightarrow(\frac{e^{i.z}-e^{-i.z}}{2.i}=2)\Leftrightarrow(e^{2.i.z}-4.i.e^{i.z}-1=0)$.

Or les racines de : $x^2-4.i.x-1=0$, sont : $(2\pm\sqrt{3}).i$.

On remplace ainsi $e^{i.z}$ par : $e^{i.z}=e^{i.a}.e^{-b}$, et l'équation : $(2\pm\sqrt{3}).i=e^{i.a}.e^{-b}$, est équivalent à :

- $e^{-b} = \left|e^{i.z}\right| = \left|(2 \pm \sqrt{3}).i\right| = 2 \pm \sqrt{3}$, soit : $b = -\ln(2 \pm \sqrt{3})$,
- $a = \dfrac{\pi}{2} + 2.k.\pi$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, les solutions de l'équation sont :

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi - i.\ln(2 \pm \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \pm i.\ln(2 + \sqrt{3}),\ k \in \mathbb{Z},$$

en remarquant que : $(2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3}) = 1$, et donc : $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$.