T.D. 2 – Réduction des endomorphismes, des matrices carrées

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P de valuation 1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et p, q les projecteurs associés. Montrer que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(**a**) u commute avec p ; (**b**) u commute avec q ; (**c**) F et G sont stables par u.

3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$ et $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I}_E) = 1$.
Montrer qu'il existe une base de E où u admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. © Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.
Ce résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

5. © Pour les propriétés suivantes, donner deux démonstrations : l'une faisant appel au théorème de Cayley-Hamilton, l'autre pas.
a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0$.
b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que : $\det A > 0$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A + 4I = 0$.
Montrer qu'il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 2A + 4I = 0$ si et seulement si n est pair.
Si c'est le cas, exprimer A^p comme combinaison linéaire de A et de I.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu) \in \mathbb{C}^4$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non proportionnelles à l'identité, sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique.

9. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u^2 soit diagonalisable.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

10. **a)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, sans racine réelle, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A.P(A) = 0$.
Montrer que le rang de A est pair.
b) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $M^3 + M = 0$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes deux à deux.
Montrer que, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, alors B est diagonalisable.
En déduire toutes les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que : $\exists n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = I$. Montrer que $M^{12} = I$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? (a réel donné.)

14. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Pour λ réel, calculer $M = (\lambda I - A)^{-1}$ quand elle existe.

Montrer que $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} P_k$ où les λ_k sont les valeurs propres de A et les P_k des matrices à préciser.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} P_k$.

15. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis calculer M^n.

Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $u = \operatorname{Can} M$ et les matrices qui commutent avec M.

16. Résoudre l'équation $B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 28 \\ 6 & -8 & 24 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

17. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, en déduire les puissances de A.

18. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -15 & -9 & 11 \\ -14 & -6 & 8 \end{pmatrix}$. Quels sont les sous-espaces stables par A ?