Chapitre 3 : Réduction des endomorphismes

Table des matières

1 Rappels sur $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$

1.1 Racines d'un polynômes

Definition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$.
On dit que $a \in \mathbb{K}$ *est une racine de* P *lorsque* $P(a) = 0$.

Proposition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P
2. Le polynôme $\mathbf{X} - \alpha$ divise P.

Proposition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

1. $r = \max\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ (\mathbf{X} - \alpha)^k | P\right\}$.
2. $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (\mathbf{X} - \alpha)^r Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Definition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, *soit* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $r \in \mathbb{N}$.
Lorsqu'une des deux conditions précédentes est vérifiée, on dit que α *est une racine de* P *de multiplicité* r.

Pour $r = 1$, *on parle de racine simple. Pour* $r = 2$, *on parle de racine double.*
Pour $r \geq 2$, *on parle de racine multiple.*

Proposition 3

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$ admettant des racines distinctes α_i, pour $i \in [\![1, s]\!]$ de multiplicité r_i.
Alors, il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$ tel que

$$P = \prod_{i=1}^{s} (\mathbf{X} - \alpha_i)^{r_i} \times Q$$

On en déduit que $\deg(P) \geq \sum_{i=1}^{s} r_i$.

Proposition 4

Un polynôme P de degré n a au plus n racines, comptées avec multiplicité.

1.2 Polynômes scindés

Definition 3

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ *un polynôme non nul.*
On dit que P *est un polynôme scindé sur* $\mathbb{K}$ *lorsqu'il existe* $(\alpha_1, ..., \alpha_s, \lambda) \in \mathbb{K}^{s+1}$ *tel que*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{s} (\mathbf{X} - \alpha_i)$$

On dit que P *est un polynôme scindé à racines simples sur* $\mathbb{K}$ *lorsqu'il existe* $(\alpha_1, ..., \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$ ***deux à deux distincts*** *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{s} (\mathbf{X} - \alpha_i)$$

Exemples : $P = (\mathbf{X}-1)(\mathbf{X}+3)$ est scindé à racines simples tandis que $Q = (\mathbf{X}-1)^4(\mathbf{X}+3)^2$ est scindé.

Proposition 5

Un polynôme P de degré n scindé a exactement n racines, comptées avec multiplicité.

Proposition 6(Théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

1.3 Polynômes annulateurs

Definition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$.

On définit un nouvel endomorphisme de E par $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$.

$$\forall x \in E,\ P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme de u. On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de u.

On dit que P est un polynôme annulateur de u ou que u annule P lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]^2$, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Proposition 8

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur.

Remarque : En dimension infinie, ce n'est pas le cas.

L'endomorphisme $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[\mathbf{X}] \to \mathbb{K}[\mathbf{X}] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ n'admet pas de polynôme annulateur.

Proposition 9

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. Si A et B sont semblables alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.
2. A et ${}^tA$ ont les mêmes polynômes annulateurs.

2 Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

2.1 D'un endomorphisme en dimension quelconque

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $D = \mathrm{Vect}(e)$ une droite vectorielle de E. On a équivalence entre :

1. D est stable par u.
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda.e$.

Definition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u lorsque

1. *x est non nul,*
2. *$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda.x$.*

Remarque : On aurait pu prendre comme définition que x est non nul et $\mathbb{K}.x$ est stable par u.

Definition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $\lambda \in E$ est une valeur propre de u lorsque $\exists x \in E,\ x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda.x$.

On appelle spectre de u et on note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u.
L'ensemble $\{x \in E,\ x \neq 0 \backslash u(x) = \lambda.x\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Remarque : Lorsque $u(x) = \lambda.x$, x est **un** vecteur propre associé à la valeur propre λ et λ est **la** valeur propre associée à x.

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

1. λ une valeur propre de u,
2. $\mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0_E.
3. $u - \lambda.\mathrm{id}_E$ est un endomorphisme non injectif de E.

Remarque : Si 0 est un valeur propre de u alors u n'est pas injectif.

Definition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u.
On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ l'espace vectoriel $\ker(u - \lambda.id_E)$.
On note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda.id_E)$.

Exemple : Quelles sont les valeurs propres d'une homothétie de rapport k, d'un projecteur, d'une symétrie ? Quels sont ses sous-espaces propres ?

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$.
Les sous-espaces propres de u sont stables par u et par v.
Les sous-espaces propres de v sont stables par u et par v.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.
Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

Remarque : Les sous-espaces propres ne sont pas toujours supplémentaires.

2.2 D'un endomorphisme en dimension finie

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si E admet une base de vecteurs propres de u, la matrice de u dans cette base a une forme simple.

Proposition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Tout endomorphisme de u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq n$$

2.3 D'une matrice carrée

Definition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On appelle endomorphisme canoniquement associé à A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique défini par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ u_A(x) = A.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarque : Toutes les définition d'éléments propres s'étendent pour une matrice carrée.

Definition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On appelle vecteur propre de A toute matrice colonne non nulle X tel que : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A.X = \lambda.X$.

On appelle valeur propre de A tout scalaire λ tel que : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0,\ A.X = \lambda.X$.

On appelle spectre A, et on note $sp(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ l'espace vectoriel $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda.I_n)$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 1 et -1 sont des valeurs propres de A. Déterminer les sous-espaces propres associés.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'admet pas de vecteurs propres.

Proposition 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

1. λ une valeur propre de A,
2. $\ker(A - \lambda.I_n)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0_E.
3. $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.

Proposition 18

1. Toute matrice carrée admet au plus n valeurs propres.
2. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

3 Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme

3.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Definition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(\mathbf{X}.I_n - A)$.

Exemple : Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Les racines de χ_A sont exactement les valeurs propres de A.
2. A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.
3. Toute matrice semblable à A a le même polynôme caractéristique que A.

Exemple : Déterminer le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme de degré n, unitaire de la forme

$$\chi_A = \mathbf{X}^n - \mathrm{tr}(A)\mathbf{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Exemple : Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Si A est triangulaire alors ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
2. Si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire par blocs alors $\chi_A = \chi_B . \chi_D$

Definition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Soit λ une valeur propre de A.
On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A. On note souvent cette valeur m_λ.

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & y & 3 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ a 2 valeurs propres : x de multiplicité 2 et y de multiplicité 1.

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Soit λ une valeur propre de A de multiplicité m_λ.
Alors $(\mathbf{X} - \lambda)^{m_\lambda}$ divise χ_A et $(\mathbf{X} - \lambda)^{m_\lambda + 1}$ ne divise pas χ_A.

Proposition 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de polynôme caractéristique scindé et de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Alors, $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{X} - \lambda_k)$ et

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \text{ et } \operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

3.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition 23

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Definition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle polynôme caractéristique de u et on note χ_u le polynôme caractéristique d'une matrice de u dans une base de E.

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u : $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u. Alors,

1. $1 \leq m_\lambda \leq n$.
2. $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$.

4 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

4.1 Définitions

Definition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La base $\mathcal{B}$ s'appelle la base de diagonalisation.

Exemple : Les projecteurs, les symétries et les homothéties sont des endomorphismes diagonalisables.

Remarque : La base de diagonalisation n'est pas unique.

Proposition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
La base de la diagonalisation est formée de vecteurs propres de u et les coefficients diagonaux de la matrice de u sont ses valeurs propres associées.

Definition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que la matrice A est diagonalisable lorsque l'endomorphisme canoniquement associé à A est diago-

nalisable.

Proposition 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :

1. A est diagonalisable.
2. A est semblable à une matrice diagonale.

4.2 Caractérisation par les vecteurs propres

Proposition 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de A.

4.3 Caractérisation par les espaces propres

Proposition 29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Les espaces propres de u sont supplémentaires dans E :
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$
3. La somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de E :
$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)).$$

Proposition 30

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. Les espaces propres de A sont supplémentaires dans E :
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A).$$
3. La somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de E :
$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)).$$

4.4 Caractérisation par le polynôme caractéristique

Proposition 31

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de u est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ.

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathbf{X} - \lambda)^{m_\lambda} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de A est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est la multiplicité de la valeur propre λ.

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\mathbf{X} - \lambda)^{m_\lambda} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$$

Remarque : Scindé ne suffit pas.

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Cest matrices sont-elles diagonalisables ?

Proposition 32

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.
Si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$ une matrice carrée.
Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.
Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

4.5 Caractérisation par les polynômes annulateurs

Proposition 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Proposition 34

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P un polynôme annulateur de u.
Les valeurs propres de u sont racines de P.

Remarque : La réciproque est fausse. Certaines racines de polynômes annulateurs de u peuvent ne pas être des valeurs propres de u.
$\mathbf{X}(\mathbf{X}-1)(\mathbf{X}-2)$ annule un projecteur.

Proposition 35 : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique de u annule u : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 36

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si u est diagonalisable alors le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathbf{X} - \lambda)$ annule u.

Proposition 37

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. L'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u - u - 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors u est diagonalisable.

Proposition 38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
L'endomorphisme induit par u sur F est un endomorphisme de F diagonalisable.

5 Trigonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

5.1 Définitions

Definition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La base $\mathcal{B}$ s'appelle la base de trigonalisation.

Exemple : Les endomorphismes diagonalisables sont trigonalisables.

Remarque : La base de trigonalisation n'est pas unique.

Proposition 39

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
Dans une base de la trigonalisation, les coefficients diagonaux de la matrice de u sont ses valeurs propres.

Definition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On dit que la matrice A est trigonalisable lorsque l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable.

Proposition 40

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On a équivalence entre :

1. A est trigonalisable.
2. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

5.2 Caractérisation par le polynôme caractéristique

Proposition 41

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est trigonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de u est scindé

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathbf{X} - \lambda)^{m_\lambda}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique de A est scindé.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

Proposition 42

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Remarque : Une fois qu'on sait qu'une matrice est trigonalisable, on connait les coefficients sur sa diagonale mais pas ses coefficients au dessus.

5.3 Exemples de trigonalisation

Exemple 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer son polynôme caractéristique et justifier qu'elle n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} * & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
3. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 & a \\ 0 & * & b \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

6 Applications de la réduction

6.1 Puissances de matrices

Proposition 43

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} .P$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} .P$$

Dans les deux cas, $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Application : *Recherche de la valeur propre de plus grand module*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées par ordre croissant de module.
On suppose que λ_n est la seule valeur propres ayant le plus grand module.

Avec les résultats précédents, $\mathrm{tr}(A^k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \lambda_n^k$ donc $\frac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \lambda_n$.

On peut alors programmer en Python cette recherche de valeur propre de plus grand module.

6.2 Suites récurrentes linéaires

Definition 17

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.
On dit que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsque

$$\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle équation caractéristique l'équation $\mathbf{X}^2 = a\mathbf{X} + b$.

Exemple : La *suite de Fibonacci* est la suite définie par : $u_0 = 0,\ u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Proposition 44

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique $\mathbf{X}^2 = a\mathbf{X} + b$.

1. Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Ar_1^n + Br_2^n,\ (A,B) \in \mathbb{K}^2$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (An + B)r_0^n,\ (A,B) \in \mathbb{K}^2$$

Les scalaires A et B sont ensuite à déterminer à partir des deux premiers termes de la suite.