Produit scalaire (corrigé niveau 2).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

48. Soit l'application donnée par : $\forall\ (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$.

 a. Il est clair que cette application est correctement définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$, et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est également symétrique et bilinéaire.

 Elle est aussi positive puisque : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)^2 \geq 0$,

 et si : $(P|P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)^2 = 0$, alors : $\forall\ 0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(0) = 0$.

 On en déduit avec la formule de Taylor que : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.X^k = 0$.

 Donc on bien ainsi défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

 b. Considérons la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et notons : $\forall\ 0 \leq i \leq n$, $P_i = X^i$.

 On constate rapidement que :

 $\forall\ 0 \leq i \leq n$, $\forall\ 0 \leq k \neq i \leq n$, $P_i^{(k)}(0) = 0$, et : $P_i^{(i)}(0) = i!$, soit : $P_i^{(k)}(0) = i!.\delta_{i,k}$.

 Donc : $\forall\ 0 \leq i, j \leq n$, $(P_i|P_j) = \sum_{k=0}^{n} P_i^{(k)}(0).P_j^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} i!.j!.\delta_{i,k}.\delta_{j,k} = i!.j!.\delta_{j,i}$,

 et donc :

 $\forall\ 0 \leq i \neq j \leq n$, $(P_i|P_j) = 0$,

 et : $\forall\ 0 \leq i \leq n$, $(P_i|P_i) = i!^2$.

 Donc la base canonique est orthogonale et il suffit de normer les vecteurs pour obtenir une base orthonormale ce qui donne :

 $\forall\ 0 \leq i \leq n$, $Q_i = \frac{1}{i!}.P_i = \frac{X^i}{i!}$.

49. Il est clair que φ est une bien une application de $\mathbb{R}[X]^2$ dans $\mathbb{R}$, car des polynômes sont de classe C^∞ et l'intégrale se calcule sur un segment.

 D'autre part, φ est symétrique et linéaire par rapport à Q (la variable de droite) donc bilinéaire.

 Ensuite : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,P) = \int_0^1 P'(t)^2.dt + P(0).P(1)$.

 Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $C^0([0,1],\mathbb{R})$, montre que :

 $|P(1) - P(0)| = \left|\int_0^1 P'(t).1.dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 P'(t)^2.dt}.\sqrt{\int_0^1 dt}$, donc :

 $\varphi(P,P) \geq (P(1)-P(0))^2 + P(0).P(1) = P(1)^2 + P(1).P(0) + P(0)^2 = (P(1) + \frac{1}{2}.P(0))^2 + \frac{3}{4}.P(0)^2$.

 Sous cette dernière forme, il est clair que : $\varphi(P,P) \geq 0$, et φ est positive.

 Enfin, si de plus : $\varphi(P,P) = 0$, alors :

 - $P(0) = P(1) = 0$, et :
 - il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on a utilisée, donc : $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $P' = \lambda.1$.

 On en déduit alors que P est affine, mais s'annulant en 0 et 1, c'est le polynôme nul, et φ est définie.

 Conclusion : φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

50. Notons : $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, une base de E, orthonormale pour φ.

 Alors : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $\varphi(e_i,e_j) = 0$, donc : $\psi(e_i,e_j) = 0$, et la base est orthogonale pour ψ.

 De plus : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $\varphi(e_i - e_j, e_i + e_j) = \varphi(e_i,e_i) + \varphi(e_i,e_j) - \varphi(e_i,e_j) - \varphi(e_j,e_j) = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$.

 Donc : $0 = \psi(e_i - e_j, e_i + e_j) = \psi(e_i,e_i) - \psi(e_j,e_j)$, puisque la base est orthogonale pour ψ et donc :

$\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $\psi(e_i, e_i) = \psi(e_j, e_j)$.

Notons alors cette dernière quantité α.

α est dans $\mathbb{R}^{+*}$, car c'est la norme au carré (attachée au produit scalaire ψ) d'un vecteur non nul (puisque normé) de E.

De plus : $\forall\ (x, y) \in E^2$, avec : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i.e_i$, on a :

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i.y_j.\psi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i.\psi(e_i, e_i) = \alpha.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = \alpha.\varphi(x, y),$$

et donc : $\psi = \alpha.\varphi$.

51. a. On va essayer d'utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz, et pour cela on utilise le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, pour les vecteurs $(\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.

Alors : $\left|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right| = n \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}^2}} = 1.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$, donc : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$.

b. Il y a égalité (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) si et seulement si les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une famille liée ce qui, étant non nuls, est équivalent à :

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\sqrt{x_k} = \lambda.\frac{1}{\sqrt{x_k}}$, ou : $x_k = \lambda$.

Comme enfin, on a imposé : $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, cela entraîne : $\lambda = \frac{1}{n}$.

On vérifie immédiatement que le n-uplet $\left(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ conduit bien à une égalité, et c'est donc la seule solution.

52. On va utiliser le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont symétriques, alors : $tr(A.B + B.A) = tr(A.B) + tr(B.A) = tr({}^tA.B) + tr({}^tB.A) = 2.(A|B)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors : $|tr(A.B + B.A)| = 2.|(A|B)| \leq 2.\sqrt{tr(A^2)}.\sqrt{tr(B^2)}$,

d'où le résultat cherché en passant au carré.

53. a. Pour : $n \in \mathbb{N}$, l'application : $P \mapsto P(0)$, est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, l'application : $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t).Q(t).dt$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc : $\exists\ !\ Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que la forme linéaire précédente coïncide avec le produit scalaire par Q_n, soit : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt$.

b. Supposons que : $\deg(Q_n) \neq n$, et donc : $\deg(Q_n) < n$.

Alors considérons le polynôme : $P = X.Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

On aurait : $0 = P(0) = \int_0^1 t.Q_n(t).Q_n(t).dt = \int_0^1 t.Q_n(t)^2.dt$.

Or la fonction : $t \mapsto t.Q_n(t)^2$, est continue sur [0,1] et positive, donc elle est nulle sur [0,1] puisque d'intégrale nulle.

Donc Q_n admet une infinité de racines (toutes les valeurs de]0,1]) donc Q_n est nul.

On aurait donc : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt = 0$, ce qui n'est pas le cas pour : $P = 1$.

Donc : $\deg(Q_n) = n$.

c. Si un tel polynôme existait, il aurait un degré N donné et serait donc solution du problème précédent

dans $\mathbb{R}_{N+1}[X]$, alors qu'on a montré que c'était impossible.
Il n'y a donc pas de solution dans $\mathbb{R}[X]$.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

54. a. Pour : $n=1$, on peut confondre E avec $\mathbb{R}$ et le produit scalaire est alors le produit dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, si on a trois nombres réels x_1, x_2, x_3, alors les trois produits $x_1.x_2$, $x_2.x_3$, $x_3.x_1$ ne peuvent être tous trois strictement négatifs car sinon le produit de ces trois quantités serait également strictement négatif, alors que : $(x_1.x_2).(x_2.x_3).(x_3.x_1) = (x_1.x_2.x_3)^2 \geq 0$.

b. On suppose maintenant le résultat établi pour tout espace de dimension : $n-1 \geq 1$.
Soit alors une famille de $n+2$ vecteurs ($x_1,...,x_{n+2}$) de E, espace vectoriel de dimension n, telle que :
$\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n+2$, $(x_i|x_j) < 0$.
Alors ces vecteurs sont non nuls (produits scalaires non nuls) et x_{n+2} étant non nul, on note :
$F = Vect(x_{n+2})^{\perp}$, qui est un espace de dimension $n-1$.
Soit alors p la projection orthogonale de E sur F, et :
$\forall\ 1 \leq i \leq n+1$, $p(x_i) = x'_i$, avec : $x_i = x'_i + x_i^{\perp}$.
Alors : $x_i^{\perp} \in F^{\perp} = Vect(x_{n+2})$, et : $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i^{\perp} = \lambda_i.x_{n+2}$.
Or : $(x_i|x_{n+2}) = (x'_i|x_{n+2}) + (\lambda_i.x_{n+2}|x_{n+2}) = \lambda_i.\|x_{n+2}\|^2$, car : $x'_i \in F = Vect(x_{n+2})^{\perp}$.
Et comme ce produit scalaire est strictement négatif par hypothèse, on en déduit que : $\lambda_i < 0$.
De plus : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n+1$, $(x_i|x_j) = (x'_i + x_i^{\perp}|x'_j + x_j^{\perp}) = (x'_i|x'_j) + (x_i^{\perp}|x_j^{\perp})$,
puisque les autres produites scalaires sont nuls, les vecteurs étant orthogonaux deux à deux.
Donc : $(x'_i|x'_j) = (x_i|x_j) - \lambda_i.\lambda_j.(x_{n+2}|x_{n+2}) = (x_i|x_j) - \lambda_i.\lambda_j.\|x_{n+2}\|^2 < 0$,
et la famille ($x'_1,...,x'_{n+1}$) est obtusangle dans un espace F de dimension $n-1$, ce qui est impossible.
Donc il n'est pas possible de trouver dans E une famille obtusangle à $n+2$ vecteurs, ce qui termine la récurrence.

c. Le maximum de vecteurs est donc $n+1$ dans un espace de dimension n.
Remarque : on n'a pas effectivement obtenu ici un maximum, mais un majorant du nombre de vecteurs formant une famille obtusangle.

55. a. Supposons donc que la famille ($x_1,...,x_n$) est liée, et donc que l'un des vecteurs (x_k) est combinaison linéaire des autres vecteurs, par exemple : $x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j.x_j$.
Alors : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $(x_i|x_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j.(x_i|x_j)$, soit : $g_{i,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j.g_{j,k}$, ou plus globalement : $C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j.C_j$,
où C_j désigne la colonne j de la matrice $G(x_1,...,x_n)$.
Puisqu'alors l'une des colonnes de $G(x_1,...,x_n)$ est combinaison linéaire des autres, $G(x_1,...,x_n)$ n'est pas inversible et : $\det(G(x_1,...,x_n)) = 0$.

b. Si on note : $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$, et : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$, alors les $a_{i,j}$ sont les coefficients de A.
De plus : $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $(x_i|x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}.a_{k,j}$, et donc : $G(x_1,...,x_n) = {}^tA.A$.
A étant inversible (comme matrice de passage), on en déduit que :
$\det(G(x_1,...,x_n)) = (\det(A))^2 > 0$.

c. On en déduit que la famille est libre si et seulement si : $\det(G(x_1,...,x_n)) \neq 0$,
et dans ce cas : $\det(G(x_1,...,x_n)) > 0$.

d. Si la famille comporte moins de vecteurs que la dimension, alors $\det(G(x_1,...,x_p))$ est nul si la famille est liée car la même démonstration que la précédente reste valable.
Et si la famille est libre, on la complète avec une base orthonormale $(u_{p+1},...,u_n)$ de $Vect(x_1,...,x_p)^{\perp}$,

et on peut donner la matrice de Gram de $(x_1,...,x_p,u_{p+1},...,u_n)$, qui vaut :

$$G' = G(x_1,...,x_p,u_{p+1},...,u_n) = \begin{pmatrix} G(x_1,...,x_p) & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que : $0 \neq \det(G') = \det(G(x_1,...,x_p)).1$, puisque la famille des n vecteurs est une base de E, et même : $\det(G') > 0$, donc : $\det(G(x_1,...,x_p)) > 0$.

e. • En reprenant la question b, on constate qu'en notant plus généralement A la matrice des coordonnées des vecteurs $x_1,...,x_n$ dans une base $\mathscr{B}$ de E, on a encore : $G(x_1,...,x_n) = {}^tA.A$.
Or la matrice ${}^tA.A$ est symétrique et à valeurs propres positives (si X est vecteur propre associé à λ, alors : $\|A.X\|^2 = {}^tX.{}^tA.A.X = \lambda.\|X\|^2$).
Donc il est nécessaire que M soit symétrique à valeurs propres positives pour qu'une famille $(x_1,...,x_n)$ de vecteurs de E vérifiant : $M = G(x_1,...,x_n)$, existe.
• Réciproquement si M soit symétrique à valeurs propres positives, alors M est diagonalisable par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale et :
$\exists\ P \in$ O(n), $\exists\ D \in$ Diag$_n$(ℝ), $M = {}^tP.D.P$, avec : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $d_{i,i} \geq 0$ (les valeurs propres de M).
Posons alors :

- $\Delta = diag(\sqrt{d_{1,1}},...,\sqrt{d_{n,n}})$, la matrice diagonale où apparaissent les $\sqrt{d_{i,i}}$, et :
- $A = {}^tP.\Delta.P$.

Alors : ${}^tA.A = {}^t({}^tP.\Delta.P).({}^tP.\Delta.P) = {}^tP.\Delta^2.P = {}^tP.D.P = M$.

Si alors on note : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$,

la matrice A est la matrice des coordonnées des vecteurs (x_k) dans la base $\mathscr{B}$ et : $G(x_1,...,x_n) = {}^tA.A$, pour les mêmes raisons que dans la question b.
Autrement dit, on a trouvé une famille $(x_1,...,x_n)$ de vecteurs de E telle que : $M = G(x_1,...,x_n)$.

f. La réponse est oui dans tous les cas.
En effet, si c est nul, toute base orthogonale de E convient.

Et si c est non nulle, on pose : $M = \begin{pmatrix} n.|c| & c & \cdots & c \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ c & \cdots & c & n.|c| \end{pmatrix}$.

La matrice M est symétrique réelle.

Il est par ailleurs immédiat que $M - (n.|c| - c).I_n = \begin{pmatrix} c & \cdots & c \\ \vdots & & \vdots \\ c & \cdots & c \end{pmatrix}$, qui est de rang 1.

Donc $(n.|c| - c)$ est valeur propre de M de multiplicité $n-1$ (car M est diagonalisable),
et la dernière valeur propre de M est donnée par : $(n-1).(n.|c| - c) + \lambda = tr(M) = n.(n.|c|)$,
soit : $\lambda = n.|c| + (n-1).c$.
Puisque les valeurs propres de M sont positives, il est possible de trouver $x_1,...,x_n$ dans E tels que :
$M = G(x_1,...,x_n)$,
et donc en particulier tels que : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $(x_i | x_j) = c$.

56. • Supposons X vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ et soit : $Y \in H$.
Alors : ${}^tX.(A.Y) = {}^tX.A.Y = {}^tX.{}^t({}^tA).Y = {}^t({}^tA.X).Y = \lambda.{}^tX.Y = 0$, car : $Y \in H$.
Donc : $A.Y \in H$, et H est bien stable par A.
• Supposons H stable par A.
Alors : $\forall\ Y \in H$, $A.Y \in H$, et : ${}^tX.(A.Y) = 0 = {}^t({}^tA.X).Y$
Le vecteur ${}^tA.X$ est donc orthogonal à l'hyperplan H et appartient donc à son orthogonal.
Mais X est non nul et dans la droite $H^{\perp}$, donc il en constitue une base, et :
$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tA.X = \lambda.X$ (relation de colinéarité).
Mais cette relation peut aussi se lire en disant que X est vecteur propre de ${}^tA$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

57. Si f et g sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, alors la fonction $|f.g|$ étant continue sur le segment [-1,+1], elle y est bornée par un réel M.
Puis l'application : $t \mapsto \dfrac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, est définie et continue sur]-1,+1[, et :
$\forall$ t $\in$]-1,+1[, $\dfrac{|f(t).g(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$,
ce qui garantit l'intégrabilité de la fonction sous l'intégrale sur]-1,+1[et la convergence de cette intégrale.
Donc l'application (qu'on notera φ) est définie de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans $\mathbb{R}$.
Elle est clairement symétrique, et linéaire par rapport à g, toutes les intégrales intervenant étant convergentes.
Elle est positive car pour : $f \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction : $t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$, est positive sur]-1,+1[.
Enfin, elle est définie car si pour f donnée, on a : $\varphi(f, f) = 0$, la fonction au-dessus en plus d'être positive sur]-1,+1[,est continue sur]-1,+1[et elle est donc nulle sur]-1,+1[.
Enfin, f admettant alors une infinité de racines est donc le polynôme nul.
On pose ensuite classiquement :
- $P_0 = 1$,
- $P_1 = X + \lambda.P_0$, et on trouve λ avec : $\varphi(P_0, P_1) = 0 = \int_{-1}^{+1} \dfrac{t+\lambda}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt$.

Or la première intégrale est nulle car la fonction est impaire sur]-1,+1[et la deuxième vaut π (à l'aide de $\arcsin$), donc on en déduit que : $\lambda = 0$, et : $P_1 = X$.
- $P_2 = X^2 + \lambda.P_1 + \mu.P_0$, et à nouveau, on étudie :

$$\varphi(P_0, P_2) = 0 = \int_{-1}^{+1} \frac{t^2 + \lambda.t + \mu}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \mu.\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt.$$

On utilise le changement de variable (bijectif et C^1) : $t = \sin(\theta)$, et : $\int_{-1}^{+1} \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta).d\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc la condition devient : $\dfrac{\pi}{2} + 0.\lambda + \pi.\mu = 0$, soit : $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

L'autre condition est : $\varphi(P_1, P_2) = 0 = \int_{-1}^{+1} \dfrac{t^3 + \lambda.t^2 + \mu.t}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \mu.\int_{-1}^{+1} \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt$,

et avec l'imparité des fonctions : $0 + \dfrac{\pi}{2}.\lambda + 0.\mu = 0$, soit : $\lambda = 0$.

Une base orthogonale est ainsi donnée par : $\left(1, X, X^2 - \dfrac{1}{2}\right)$.

On termine en calculant la norme de ces vecteurs avec :

- $\varphi(P_0,P_0)=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt=\pi$, soit : $Q_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.P_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$,
- $\varphi(P_1,P_1)=\int_{-1}^{+1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt=\frac{\pi}{2}$, soit : $Q_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.P_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.X$,
- $\varphi(P_2,P_2)=\int_{-1}^{+1}\frac{t^4-t^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{1-t^2}}.dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^4(\theta).d\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3.\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$, soit : $Q_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.(2.X^2-1)$.

58. Notons A la matrice : $A=(a_{i,j})$.

Le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour forme : $\varphi(M.M')=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}m'_{i,j}$.

On cherche donc à minimiser $\|A-M\|^2$, pour : $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit : $d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$.
Puisque les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on cherche donc la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Pour l'obtenir on décompose A suivant la somme directe précédente :
$A=\frac{1}{2}.(A+{}^tA)+\frac{1}{2}.(A-{}^tA)$, de façon classique,

et la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est alors : $p(A)=\frac{1}{2}.(A+{}^tA)$.

La quantité cherchée vaut alors : $\inf_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)=d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2=\|A-p(A)\|^2=\frac{1}{4}.\|A-{}^tA\|^2$.

Finalement dans le cas général : $\inf_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)=\frac{1}{4}.\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j}-a_{j,i})^2$,

Pour le cas particulier proposé on a : $\forall\ 1\le i,j\le n$, $a_{i,j}=i$,

donc : $C=\inf_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)=\frac{1}{4}.\sum_{1\le i,j\le n}(i-j)^2=\frac{1}{2}.\sum_{1\le j<i\le n}(i-j)^2=\frac{1}{2}.\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)^2\right)=\frac{1}{2}.\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}k^2\right)$,
avec le changement d'indice : $k=i-j$, dans la somme intérieure, et :

$C=\frac{1}{2}.\sum_{i=2}^{n}\frac{i.(i-1).(2.i-1)}{6}=\frac{1}{12}.\sum_{i=1}^{n}i.(i-1).(2.i-1)=\frac{1}{6}.\frac{n^2.(n+1)^2}{4}-\frac{1}{4}.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}+\frac{1}{12}.\frac{n.(n+1)}{2}$,

soit enfin : $C=\frac{1}{24}.n.(n+1).(n.(n+1)-(2.n+1)+1)=\frac{n^2.(n^2-1)}{24}$.

Projecteurs orthogonaux.

59. On peut écrire : $x=\lambda.y+n$, avec : $n\in(Vect(y))^{\perp}$, soit : $(y|n)=0$.

Donc : $(x|y)=\lambda.\|y\|^2$, et la projection orthogonale de x sur $Vect(y)$ vaut : $\frac{(x|y)}{\|y\|^2}.y$.

De même, la projection orthogonale de y sur $Vect(x)$ vaut : $\frac{(y|x)}{\|x\|^2}.x$.

Donc ces deux vecteurs sont égaux si et seulement si : $\frac{(y|x)}{\|x\|^2}.x=\frac{(x|y)}{\|x\|^2}.x=\frac{(x|y)}{\|y\|^2}.y$.

Distinguons alors deux cas :
- x et y sont orthogonaux et les deux projections sont alors bien égales,
- x et y ne sont par orthogonaux et ils sont alors colinéaires puisque : $\|y\|^2.x=\|x\|^2.y$.

Si maintenant, on recalcule la norme de ces vecteurs, on obtient : $\|y\|^2.\|x\| = \|x\|^2.\|y\|$, et comme x et y sont non nuls, on en déduit que : $\|x\| = \|y\|$, puis : $x = y$.
Dans ce dernier cas, les deux projections sont encore égales.
Finalement les deux projections proposées sont égales si et seulement si x et y sont égaux ou orthogonaux.

60. a. La matrice U est clairement orthogonale (ses vecteurs colonnes forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$, dans un ordre permuté de l'ordre canonique).
Donc : ${}^tU = U^{-1}$.
De plus puisqu'on peut interpréter U comme la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, défini par :
- $u(e_1) = e_n$,
- $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $u(e_i) = e_{i-1}$,

on en déduit que : $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $u^k(e_i) = e_{i+n-k}$, où l'indice est à lire « modulo n ».
Alors : $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, la diagonale de U^k, est formée de 0.
D'où : $\forall\ 0 \leq p < q \leq n-1$, $(U^p | U^q) = tr({}^t(U^p).U^q) = tr(U^{-p}.U^q) = tr(U^{q-p})$.
Mais pour un tel couple (p, q) d'entiers, on a : $1 \leq q - p \leq n-1$, et : $tr(U^{q-p}) = 0$.
La famille est bien orthogonale et tous ses vecteurs étant non nuls, elle est libre.
Mais comme elle est génératrice de F, elle en constitue donc une base orthogonale.

b. On peut en déduire une base orthonormale de F en normant ces vecteurs, et :
$\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $\|U^k\|^2 = tr({}^tU^k.U^k) = tr(I_n) = n$, car U (et donc toute matrice U^k) est orthogonale.
On peut ainsi en déduire la projection orthogonale de A sur F qui vaut :
$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{U^k}{\sqrt{n}} \middle| A\right).\frac{U^k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} (U^k | A).U^k .$$
Il reste à calculer : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $(U^k | A) = (A | U^k) = tr(A.U^k)$,
Si on note a l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a :
- $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $a(e_i) = e_1$, et donc :
- $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $aou^k(e_i) = a(e_{i+n-k}) = e_1$,

donc : $A.U^k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, d'où : $(U^k | A) = tr(A.U^k) = 1$.

Finalement : $p_F(A) = A' = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} U^k = \frac{1}{n}.\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

61. Si H existe, alors : on doit avoir : $x = p_H(x) + x^\perp$, où : $x^\perp \in H^\perp$.
Donc : $x - y \in H^\perp$, et comme : $x - y \neq 0$, le vecteur : $n = x - y$, dirige la droite : $D = H^\perp$.
Autrement dit H ne peut valoir que : $H = (Vect(x-y))^\perp$.
Réciproquement : $(n|y) = (x-y|y) = (x|y) - \|y\|^2 = 0$, et : $y \in (Vect(n))^\perp = H$.
Et comme : $x = (x-y) + y$, avec : $y \in H$, et : $x - y \in H^\perp$, on a bien : $y = p_H(x)$.

62. Raisonnons par double implication.
- Si p est un projecteur orthogonal, alors :

$\forall\ x \in$ E, $x = p(x) + (x - p(x))$, et : $(p(x) | x - p(x)) = 0$.

Donc : $0 = (p(x)|x) - (p(x)|p(x))$, donc : $(p(x)|x) = (p(x)|p(x)) = \|p(x)\|^2 \geq 0$.

• Supposons maintenant que : $\forall\ x \in$ E, $(p(x)|x) \geq 0$.

Notons alors : $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \ker(p)$, et $p_\perp$ le projecteur orthogonale de E sur F.

Alors : $\forall\ e \in G$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, on note : $x_\lambda = e - \lambda.p_\perp(e)$, et :

$0 \leq (x_\lambda|p(x_\lambda)) = (e - \lambda.p_\perp(e)|p(e - \lambda.p_\perp(e))) = (e - \lambda.p_\perp(e)| - \lambda.p_\perp(e))$,

car : $e \in G$, donc : $p(e) = 0$, et : $p_\perp(e) \in F$, donc : $p(p_\perp(e)) = p_\perp(e)$.

On a donc : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda^2.\|p_\perp(e)\|^2 - \lambda.(e|p_\perp(e))$,

et donc :

- $\forall\ \lambda > 0$, $0 \leq \lambda.\|p_\perp(e)\|^2 - (e|p_\perp(e))$, donc en faisant tendre λ vers 0 : $(e|p_\perp(e)) \leq 0$.
- $\forall\ \lambda < 0$, $0 \geq \lambda.\|p_\perp(e)\|^2 - (e|p_\perp(e))$, et à nouveau en faisant tendre λ vers 0 : $(e|p_\perp(e)) \geq 0$.

On en déduit que : $(e|p_\perp(e)) = 0$, et donc : $e \in F^\perp$.

En effet, si on note la décomposition de e suivant : $E = F \oplus F^\perp$, sous la forme : $e = p_\perp(e) + e_\perp$, alors :

$(e|p_\perp(e)) = 0 = (p_\perp(e)|p_\perp(e)) + (p_\perp(e)|e_\perp) = \|p_\perp(e)\|^2 + 0$, donc : $p_\perp(e) = 0$.

On vient ainsi de montrer que : $G \subset F^\perp$, et comme ils ont tous deux pour dimension : $n - \dim(F)$, ils sont égaux et la projection p est bien la projection orthogonale sur F.

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

63. a. Calculons le produit : $S = D^{-1}.A.D$, pour une matrice diagonale D.
En notant : $A' = A.D$, on obtient successivement :

$$\forall\ 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j}' = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.d_{k,j} = a_{i,j}.d_{j,j}, \text{ puis : } s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_{i,k}}.a_{k,j}' = a_{i,j}.\frac{d_{j,j}}{d_{i,i}}.$$

D répondra au problème posé si et seulement si : $\forall\ 1 \leq j \leq n-1$, $s_{i+1,j} = s_{i,j+1}$,

$$\text{c'est-à-dire : } a_{j+1,j}.\frac{d_{j,j}}{d_{j+1,j++1}} = c_j.\frac{d_{j,j}}{d_{j+1,j++1}} = a_{j,j++1}.\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}} = b_j.\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}}, \text{ soit : } \frac{c_j}{b_j} = \left(\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}}\right)^2.$$

Si maintenant, on impose à $d_{1,1}$ de valoir 1, D répondra au problème si et seulement si :

$$\forall\ 1 \leq j \leq n-1,\ \frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}} = \varepsilon_j.\sqrt{\frac{c_j}{b_j}}, \text{ avec : } \varepsilon_j = \pm 1.$$

Une solution est alors définie par : $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $d_{l,l} = \prod_{j=1}^{i-1} \sqrt{\frac{c_j}{b_j}}$.

Autrement dit, on vient de proposer une matrice D répondant au problème posé.

b. La matrice S étant diagonalisable puisque symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe donc P orthogonale et Δ diagonale, telle que : $\Delta = {}^tP.S.P = P^{-1}.S.P$.
Donc : $\Delta = P^{-1}.D^{-1}.A.D.P = (D.P)^{-1}.A.(D.P)$, et A est diagonalisable.

64. a. On sait déjà, puisque ${}^tA.A$ est symétrique réelle, que toutes ses valeurs propres sont réelles.
Soit ensuite μ une des valeurs propres et X un vecteur propre associé.
Alors : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tA.A.X = \mu.X$, et donc : ${}^tX.{}^tA.A.X = \mu.{}^tX.X$,

ce qui s'écrit encore : $\|A.X\|^2 = \mu.\|X\|^2$, ou : $\mu = \dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2}$,

où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et où on a utilisé le fait que X est non nul.
Donc μ est bien positive.

b. Il suffit de dire que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ est la somme des valeurs propres de ${}^tA.A$ donc égale à sa trace.

Or si on note : $S={}^tA.A$., alors : $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}.a_{k,j}$, et : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^2$.

65. La matrice ${}^tA.A - A.{}^tA$ est symétrique et réelle, donc diagonalisable.
De plus, par hypothèse, toutes ses valeurs propres sont positives.
Enfin $tr({}^tA.A - A.{}^tA)$ est la somme des valeurs propres de cette matrice et :

- elle est positive car les valeurs propres sont positives,
- elle est nulle car : $tr({}^tA.A) = tr(A.{}^tA)$.

Donc toutes les valeurs propres de ${}^tA.A - A.{}^tA$ sont nulles et étant diagonalisable, cette matrice est semblable à la matrice nulle, donc est nulle.
Finalement : ${}^tA.A = A.{}^tA$, et A et ${}^tA$ commutent.

66. a. Pour : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(A.X).(B.X)$ représente le produit scalaire (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canonique) de $A.X$ et $B.X$ et donc :

- $(A.X|B.X)={}^t(A.X).(B.X)={}^tX.{}^tA.B.X = -{}^tX.A.B.X$, et :
- $(A.X|B.X) = (B.X|A.X)={}^t(B.X).(A.X)={}^tX.{}^tB.A.X={}^tX.B.A.X={}^tX.A.B.X$,

puisque A et B commutent.
Ces deux quantités étant à la fois égales et opposées, on en déduit que :
$(A.X|B.X) = (B.X|A.X)={}^tX.B.A.X={}^tX.A.B.X = 0$.

b. On peut ensuite calculer, pour X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, :
$\|(A+B).X\|^2 = ((A+B).X|(A+B).X) = (A.X|A.X) + (A.X|B.X) + (B.X|A.X) + (B.X|B.X)$,
et on en déduit avec ce qu'on a établi à la question a. que :
$\|(A+B).X\|^2 = (A.X|A.X)(B.X|B.X) = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$.
De même : $\|(A-B).X\|^2={}^tX.{}^tA.A.X-{}^tX.{}^tA.B.X-{}^tX.{}^tB.A.X+{}^tX.{}^tB.B.X = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$,
d'où finalement l'égalité voulue.

c. Supposons donc B inversible, et soit : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que : $(A+B).X = 0$.
Alors la norme de ce vecteur est nulle et : $0 = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$,
donc comme somme de carrés, on en déduit que : $B.X = 0$, puis : $X = 0$, puisque B est inversible.
Donc : $\ker((A+B)) = \{0\}$, et $A+B$ est inversible.
On peut aussi utiliser l'argument que B est alors régulière, donc inversible.
De façon identique, on montre que $A-B$ est inversible, ou en remarquant que :
$\det(A-B) = \det({}^t(A-B)) = \det({}^tA-{}^tB) = \det(-A-B) = (-1)^n.\det(A+B) \neq 0$.
Enfin : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists\ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = (A-B).Y$, et :
$\|(A+B).(A-B)^{-1}.X\| = \|(A+B).Y\| = \|(A-B).Y\| = \|X\|$ (on a utilisé l'égalité de la question b).
La matrice $(A+B).(A-B)^{-1}$ conserve donc la norme dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et est donc orthogonale.
On peut aussi dire que l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice conserve la norme dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, donc sa matrice représentative dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale.

67. a. Notons tout d'abord que ${}^tA.A$ est symétrique réelle donc toutes ses valeurs propres sont réelles.
Puis pour X un vecteur propre de ${}^tA.A$ associé à la valeur propre λ, on a :
${}^tX.{}^tA.A.X={}^t(A.X).A.X = \|A.X\|^2$, et : ${}^tX.{}^tA.A.X={}^tX.{}^t(A.A.X)={}^tX.(\lambda.X) = \lambda.{}^tX.X = \lambda.\|X\|^2$.
Donc X étant non nul, on en déduit que : $\lambda = \dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2} \ge 0$.

Donc toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$ sont positives.

b. Si A est inversible, alors pour X un vecteur non nul, $A.X$ n'est jamais nul.

Donc toute valeur propre de ${}^tA.A$ est strictement positive.

c. On va s'attacher à la positivité et la définition de cette forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si : $A = B$, alors $tr({}^tA.A)$ est la somme des valeurs propres de ${}^tA.A$ qui est évidemment réelle, mais aussi positive puisque toutes les valeurs propres de cette matrice sont positives : c'est une forme positive.

• De plus, si cette trace est nulle, alors comme somme de nombres positifs, tous ces nombres (et donc toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$) sont nul(le)s.

Mais ${}^tA.A$ étant de plus diagonalisable car symétrique réelle, ${}^tA.A$ est semblable à la matrice nulle (la matrice diagonale rassemblant ses valeurs propres).

Donc : ${}^tA.A = 0$.

Enfin : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $({}^tA.A.X = 0) \Rightarrow (\|A.X\| = 0)$ (avec la question a) $\Rightarrow (A.X = 0)$,

et A est bien la matrice nulle (l'endomorphisme canoniquement associé à A est nul) : la forme est définie.

Finalement, l'application : $(A, B) \mapsto tr({}^tA.B)$, définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

68. a. On a immédiatement : $\forall (A, B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, $A + B$ est symétrique réelle et :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.(A+B).X = {}^tX.A.X + {}^tX.B.X \geq 0$, et : $A + B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b. Si de plus on suppose que : $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tX.(A+B).X = {}^tX.A.X + {}^tX.B.X > 0$,

comme somme d'un élément positif et d'un élément strictement positif.

Donc : $A + B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Tout d'abord : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA.A$ est symétrique réelle puisque : ${}^t({}^tA.A) = {}^tA.{}^t({}^tA) = {}^tA.A^t$.

Puis : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.{}^tA.A.X = \|A.X\|^2 \geq 0$, où $\|\ .\ \|$ est la norme canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc : ${}^tA.A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

d. Si de plus A est inversible, alors :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A.X = 0) \Rightarrow (0 = A^{-1}.A.X = X)$, et donc :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tX.{}^tA.A.X = \|A.X\|^2 > 0$, car : $A.X \neq 0$.

Donc : ${}^tA.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Tout d'abord, la matrice ${}^tA.S.A$ est bien symétrique puisque : ${}^t({}^tA.S.A) = {}^tA.{}^tS.{}^t({}^tA) = {}^tA.S.A$.

Puis : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que : $X \neq 0$, alors : $Y = A.X \neq 0$, car A est inversible, et donc :

${}^tX.{}^tA.S.A.X = {}^tY.S.Y > 0$,

et : ${}^tA.S.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales.

69. a. Pour : $x \in$ E, on a : $\|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\|$, donc : $\|f(x)\| = \|x\|$.

b. Pour : $(x, y) \in$ E^2, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.\|x\|^2 + 2.\|y\|^2$.

Pour : $x \in$ E, en appliquant l'égalité précédente aux vecteurs $f(x)$ et $f(-x)$, on obtient :

$\|f(x) + f(-x)\|^2 + \|f(x) - f(-x)\|^2 = 2.\|f(x)\|^2 + 2.\|f(-x)\|^2 = 2.\|x\|^2 + 2.\|-x\|^2 = 4.\|x\|^2$.

Puis : $\|f(x) - f(-x)\| = \|x - (-x)\| = 2.\|x\|$,

et avec le carré, on en déduit que : $\|f(x) + f(-x)\|^2 = 0$.

Donc : $\forall x \in$ E, $f(-x) + f(x) = 0$, et : $f(-x) = -f(x)$.

c. On calcule alors : $\forall (x, y) \in$ E^2,

• $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2.(f(x)|f(y))$,

• $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2.(x|y)$, et comme ces quantités sont égales, la question a permet de conclure que : $(f(x)|f(y))=(x|y)$.

d. Puisque f conserve la norme et le produit scalaire, la famille ($f(e_1),...,f(e_n)$) est une base orthonormale de E, et donc dans cette base orthonormale de E, on peut écrire :

$\forall\ x\in$ E, $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(f(e_k)|f(x)).f(e_k)=\sum_{k=1}^{n}(e_k|x).f(e_k)$.

e. Il reste à montrer que f est linéaire, mais c'est maintenant immédiat :

$\forall\ (x,y)\in$ E², $\forall\ (\lambda,\mu\lambda)\in$ ℝ²,

$$f(\lambda.x+\mu.y)=\sum_{k=1}^{n}(e_k|\lambda.x+\mu.y).f(e_k)=\lambda.\sum_{k=1}^{n}(e_k|x).f(e_k)+\mu.\sum_{k=1}^{n}(e_k y).f(e_k)=\lambda.f(x)+\mu.f(y).$$

Et puisque f conserve la norme ou le produit scalaire, f est bien un automorphisme orthogonal de E.

70. Soit A une matrice appartenant à ($\mathbf{O}(n)\cap\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$).
Toutes les colonnes de A doivent être constituées d'entiers, et de norme 1 pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc il y a un et un seul terme non nul par colonne.
Cette valeur entière vaut alors ±1.
De plus, deux colonnes distinctes doivent être orthogonales, donc les deux termes non nuls ne peuvent se trouver sur la même ligne.
Plus précisément, si pour : $1\le j\le n$, on note $\sigma(j)$ le numéro de ligne telle que : $a_{\sigma(j),j}\ne 0$, alors :
$\forall\ 1\le j\ne j'\le n,\ \sigma(j)\ne\sigma(j')$,
autrement dit l'application σ, de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est injective, donc bijective et c'est une permutation de $\mathbb{N}_n$.
Réciproquement, considérons maintenant une matrice A construite à l'aide d'une permutation de $\mathbb{N}_n$, de telle sorte que tous ses termes soient nuls sauf : $\forall\ 1\le j\le n,\ a_{\sigma(j),j}=\pm 1$.
Alors les colonnes de A forment bien une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et A répond au problème.
Conclusion : il y a $2^n.n!$ solutions au problème étudié et : $card(O(n)\cap\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))=2^n.n!$.

71. Si A est une telle matrice, alors sa première ligne comporte au moins un terme non nul, puisque :
$\|L_1\|^2=1$, pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
Supposons que : $a_{1,j}\ne 0$.
Alors : $\forall\ 2\le i\le n,\ 0=(L_1|L_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}.a_{i,k}\ge a_{1,j}.a_{i,j}\ge 0$,
puisque tous les autres produits sont positifs.
Or : $a_{1,j}\ne 0$, donc : $\forall\ 2\le i\le n,\ a_{i,j}=0$.
Autrement dit, il y a un seul terme non nul dans la colonne j nombre qu'on va noter : $j=\sigma(1)$.
Et comme la colonne j doit être de norme 1, on a aussi : $\|C_j\|^2=a_{1,\sigma(1)}^2=1$, donc : $a_{1,\sigma(1)}=1$ (car positif).
De même, L_2 comporte au moins un terme non nul qui ne peut être $a_{2,\sigma(1)}$, (car : $\forall\ 2\le i\le n,\ a_{i,\sigma(1)}=0$), donc :
$\exists\ j'=\sigma(2)\ne\sigma(1)$, tel que : $a_{2,\sigma(2)}\ne 0$, et : $\forall\ 1\le i\ne 2\le n,\ 0=(L_2|L_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{2,k}.a_{i,k}\ge a_{2,\sigma(2)}.a_{i,\sigma(2)}\ge 0$.
Or à nouveau : $a_{2,\sigma(2)}\ne 0$, donc : : $\forall\ 1\le i\ne 2\le n,\ a_{i,\sigma(2)}=0$..
Enfin, avec la colonne $\sigma(2)$ (qui ne comporte donc qu'un seul terme non nul), on déduit : $a_{2,\sigma(2)}=1$.
On continue par récurrence pour construire ainsi une permutation σ de $\mathbb{N}_n$, telle que :
$\forall\ 1\le k\le n,\ a_{k,\sigma(k)}=1$, et : $\forall\ 1\le k'\ne k\le n,\ a_{k',\sigma(k)}=0$.
Autrement dit, A est une matrice définie avec une permutation σ par :
$\forall\ 1\le i,j\le n,\ a_{i,j}=\delta_{\sigma(i),j}$, où δ est le symbole de Kronecker.
Réciproquement, toute matrice du type précédent est bien orthogonale (elle correspond à une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette même base canonique, dont on a permuté les vecteurs à l'aide de σ) et ses coefficients sont positifs.

Il y en a donc $n!$.

72. Nous allons ici confondre matrices et endomorphismes, ces derniers étant rapportés à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{R}^n$ sera identifié ainsi à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est formée par C et une famille $(C_1,...,C_{n-1})$ de $n-1$ vecteurs orthogonaux à C.

On a alors :

- $S.C = (I_n - \frac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC).C = C - \frac{2}{{}^tC.C}.C.({}^tC.C) = C - 2.C = -C$,

car : ${}^tC.C$ est un réel strictement positif : ${}^tC.C = \|C\|^2$.

- $\forall\ 1 \le i \le n-1$, $S.C_i = (I_n - \frac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC).C_i = C_i - \frac{2}{{}^tC.C}.C.({}^tC.C_i) = C_i - 0 = C_i$.

Autrement dit S laisse invariants tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ qui sont orthogonaux à C et transforme C en $-C$.

C'est donc bien la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$ par rapport à : $H = Vect(C_1,...,C_{n-1}) = (Vect(C))^\perp$, ce qu'on appelle encore la réflexion par rapport à H.

73. On a : ${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$, on a : ${}^tM.M = \begin{pmatrix} {}^tA.A + {}^tC.C & {}^tA.B + {}^tC.D \\ {}^tB.A + {}^tD.C & {}^tB.B + {}^tD.D \end{pmatrix} = I_n$, soit :

${}^tA.A + {}^tC.C = I_p$, ${}^tA.B + {}^tC.D = 0$, ${}^tB.B + {}^tD.D = I_q$, avec : $p + q = n$.

Puis on imagine un produit par blocs ou apparaissent les matrices A, M, D, par exemple :

$\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0 & I_q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, d'où on déduit, en calculant les déterminants :

$(\det({}^tA).\det(I_q)).\det(M) = (\det(I_p).\det(D))$, puisque les matrices sont triangulaires par blocs, et :

$\det(A).\det(M) = \det(D)$.

Exercice général : polynômes de Legendre.

74. a. Pour n dans $\mathbb{N}$, Q_n est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré $2.n$ donc est de degré n.

On va maintenant utiliser le théorème de Rolle et noter : $R_n = (X^2 - 1)^n$.

- R_n a deux racines d'ordre n, 1 et -1 donc R_n' s'annule sur]-1,+1[en une valeur : $a_{1,1} \in$]-1,+1[.
- R_n' s'annule donc en 1 et -1 (racines d'ordre $n-1$ de R_n') et en $a_{1,1}$: le théorème de Rolle à nouveau montre que R_n'' s'annule en deux valeurs : $a_{2,1} < a_{2,2}$, dans]-1,+1[.
- si on suppose que pour : $1 \le k \le n-1$, $R_n^{(k)}$ s'annule en k valeurs : $a_{k,1} < ... < a_{k,k}$, dans]-1,+1[, alors ce polynôme s'annule encore en 1 et -1 (ce sont des racines d'ordre : $n - k \ge 1$), et le théorème de Rolle montre que : $(R_n^{(k)})' = R_n^{(k+1)}$, s'annule sur les $k+1$ intervalles $]-1, a_{k,1}[$, $]a_{k,1}, a_{k,2}[$, …, $]a_{k,k}, 1[$, donc en $k+1$ valeurs : $a_{k+1,1} < ... < a_{k+1,k+1}$, de l'intervalle]-1,+1[.
- finalement $R_n^{(n)}$ s'annule en n valeurs de]-1,+1[, tout comme : $Q_n = \frac{1}{2^n n!}.R_n^{(n)}$.

Et puisque ce dernier polynôme est de degré n, les n racines ainsi trouvées sont <u>les</u> racines de Q_n, et elles sont simples.

Pour : $n \ge 1$, et : $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a alors :

$$(A|Q_n) = \int_{-1}^{1} A(t).Q_n(t).dt = \frac{1}{2^n.n!}.\left(\left[A(t).R_n^{(n-1)}(t)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} A'(t).R_n^{(n-1)}(t).dt \right) = \frac{-1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} A'(t).R_n^{(n-1)}(t).dt,$$

car 1 et -1 étant racines de $R_n^{(n-1)}$, le crochet est nul.

A l'aide d'intégrations par parties successives, une récurrence immédiate donne :

$$(A|Q_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} A^{(n-1)}(t).R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\alpha.\int_{-1}^{+1} R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\alpha.[R_n(t)]_{-1}^{+1} = 0,$$

car $A^{(n-1)}$ est une constante et R_n admet 1 et -1 comme racines (on a supposé : $n \geq 1$).

Donc : $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b. Si on reprend le calcul précédent en remplaçant A par Q_n, on obtient :

$$(Q_n|Q_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^n.n!)^2}.\int_{-1}^{+1} R_n^{(n-1)}(t).R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^n.n!)^2}.\left(\left[R_n^{(n-1)}(t).R_n(t)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} R_n(t).R_n^{(n)}(t).dt\right).$$

Le crochet est encore nul, et $R_n^{(n)}$ est constant égal à $(2.n)!$, donc :

$$(Q_n|Q_n) = \frac{(-1)^n}{(2^n.n!)^2}.(2.n)!.\int_{-1}^{+1} R_n(t).dt = 2.\frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\int_0^{+1}(1-t^2)^n.dt = 2.\frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2.n+1}(\theta).d\theta,$$

(où on a utilisé la parité du polynôme et le changement de variable : $t = \sin(\theta)$), et on reconnaît une intégrale de Wallis.

Donc : $(Q_n|Q_n) = 2.\dfrac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\dfrac{2^{2.n}.n!^2}{(2.n+1)!} = \dfrac{2}{2.n+1}$.

Ensuite, on peut remarquer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = (X^2-1).R_n$, et avec la formule de Leibniz :

$$R_{n+1}^{(n+1)} = (X^2-1).R_n^{(n+1)} + 2.(n+1).X.R_n^{(n)} + \binom{n+1}{2}.2.R_n^{(n-1)}.$$

Mais le premier et le dernier terme s'annulent en ±1 (pour le dernier, parce que 1 et -1 sont racines d'ordre 1 de R_n), et donc en notant : $\varepsilon = \pm 1$, on a : $R_{n+1}^{(n+1)}(\varepsilon) = 2.(n+1).\varepsilon.R_n^{(n)}(\varepsilon)$,

d'où on déduit : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1}(\varepsilon) = \varepsilon.Q_n(\varepsilon)$.

Comme de plus : $Q_0(1) = Q_0(-1) = 1$,

on obtient finalement : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $Q_n(1) = 1$, et : $Q_n(-1) = (-1)^n$.

c. On commence par remarquer que : $\deg(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1}) = n-2$.

En effet, on constate que ce polynôme a les coefficients suivants :

- pour X^n : $n.\left[\dfrac{1}{2^n.n!}.\dfrac{(2.n)!}{n!}\right] - (2.n-1).\left[\dfrac{1}{2^{n-1}.(n-1)!}.\dfrac{(2.n-2)!}{(n-1)!}\right] = \dfrac{(2.n-1)!}{2^n.(n)!.(n-1)!}.(2.n-2.n) = 0$,
- pour X^{n-1} : 0, car Q_n ne comporte que des termes de même parité que n, tout comme $X.Q_{n-1}$,
- pour X^{n-2} :

$$-n.\left[\frac{1}{2^n.n!}.n.\frac{(2.n-2)!}{(n-2)!}\right] + (2.n-1).\left[\frac{1}{2^{n-1}.(n-1)!}.(n-1).\frac{(2.n-4)!}{(n-4)!}\right] = -(n-1).\frac{1}{2^{n-2}.(n-2)!}.\frac{(2.n-4)!}{(n-2)!},$$

soit le coefficient dominant de Q_{n-2} multiplié par $-(n-1)$.

De plus : $\forall\ 0 \leq k \leq n-3$, $(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1}|X^k) = n.(Q_n|X^k) - (2.n-1).(Q_{n-1}|X^{k+1}) = 0$,

car Q_n et Q_{n-1} sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Donc le polynôme $(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1})$ est dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, orthogonal à l'hyperplan $Vect(1,\ldots,X^{n-3})$), donc sur la même droite que Q_{n-2}.

On en déduit qu'il est proportionnel à ce dernier polynôme.
La valeur de ce coefficient de proportionnalité se fait avec les coefficients dominants et :

$$n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1} = -(n-1).Q_{n-2}.$$

d. Le procédé de Gram-Schmidt garantit ce résultat, puisque la famille $(1,\ldots,X^n)$ est libre pour tout n.

e. On sait que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} = (Vect(1,\ldots,X^{n-1}))^{\perp} = (Vect(P_0,\ldots,P_{n-1}))^{\perp}$.

De plus Q_n et P_n sont tous deux de degré n, donc ils sont tous deux dans $\mathbb{R}_n[X]$, sur une même droite orthogonale à l'hyperplan $Vect(1,\ldots,X^{n-1})$.

Donc : $\exists\ \lambda_n \in \mathbb{R}$, $P_n = \lambda_n.Q_n$, puisque Q_n est non nul et constitue ainsi une base de la droite.

Puis : $(Q_n|Q_n) = \lambda_n^2.(P_n|P_n) = \lambda_n^2$, d'où : $\lambda_n = \pm\|Q_n\| = \pm\sqrt{\dfrac{2}{2.n+1}}$.

Enfin : $\lambda_n.(X^n|P_n) = (X^n|Q_n) = \dfrac{(-1)^n}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} n!.R_n(t).dt = \dfrac{1}{2^n}.\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n.dt > 0$,

donc : $\lambda_n > 0$, et finalement : $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{2}{2.n+1}}$.

f. Notons : $S_n = ((1-X^2).P_n')'$, qui est un polynôme de degré au plus n.

On calcule alors :

$\forall\ 0 \le k \le n-1,\ (S_n|X^k) = \int_{-1}^{+1}\dfrac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)].t^k.dt = [(1-t^2).P_n'(t).t^k]_{-1}^{+1} - k.\int_{-1}^{+1}(1-t^2).P_n'(t).t^{k-1}.dt$,

et : $(S_n|X^k) = -k.\int_{-1}^{+1}(1-t^2).P_n'(t).t^{k-1}.dt = -k.[(1-t^2).P_n(t).t^{k-1}]_{-1}^{+1} + k.\int_{-1}^{+1}[(k-1).t^{k-2} - (k+1).t^k].P_n(t).dt$.

Enfin, on a : $\int_{-1}^{+1}[(k-1).t^{k-2} - (k+1).t^k].P_n(t).dt = ((k-1).X^{k-2} - (k+1).X^k|P_n) = 0$,

puisque P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc : $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et : $\exists\ \alpha_n \in \mathbb{R},\ S_n = \alpha_n P_n$,

car ils sont tous deux dans $\mathbb{R}_n[X]$ (comme dans la question e).

Il suffit alors de comparer les coefficient dominant pour constater que celui de S_n (coefficient de X^n) vaut : $-n.(n+1).p_{n,n}$, où $p_{n,n}$ est le coefficient dominant de P_n.

Conclusion : $\alpha_n = -n.(n+1)$, et on en déduit l'égalité voulue.

Pour le dernier point, pour : $n \ge 1$, on peut écrire :

$$a_n = \int_0^1 P_n(t).dt = -\frac{1}{n.(n+1)}.\int_0^1\frac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)].dt = -\frac{1}{n.(n+1)}.[(1-t^2).P_n'(t)]_0^1 = \frac{P_n'(0)}{n.(n+1)}.$$

Or P_n est proportionnel à Q_n et le polynôme R_n de la question a. étant pair, Q_n est de même parité que n, donc Q_n' est de même parité que $n+1$, donc :

- si n est pair, Q_n' est impair, $Q_n'(0) = 0$, et : $a_n = 0$.
- si n est impair, alors : $R_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.X^{2.k}.(-1)^{n-k}$, donc $Q_n'(0)$ correspond à la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ en

0 de R_n, autrement dit elle est donnée par le terme en $X^{2.k}$, où : $2.k = n+1$.

Donc : $Q_n'(0) = \dfrac{1}{2^n.n!}.(n+1)!.(-1)^{n-\frac{n+1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} = \dfrac{(n+1)}{2^n}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

Soit : $a_n = \dfrac{1}{n.(n+1)}.\dfrac{1}{\lambda_n}.Q_n'(0) = \dfrac{1}{n.(n+1)}.\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}.\dfrac{(n+1)}{2^n}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+\frac{1}{2}}.n}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

75. Rappel : un retournement est une rotation d'angle π.

a. Si f et g sont deux rotations de même axe Δ, alors dans une base adaptée à $\Delta \oplus \Delta^\perp$, les matrices de f et de g valent : $mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, et : $mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & -\sin(b) \\ 0 & \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

Donc : $mat(fog) = mat(gof) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ 0 & \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$, et f et g commutent.

Si f et g sont deux retournements autour de : $\Delta = Vect(e)$, et $\Delta' = Vect(e')$, avec e et e' orthogonaux et normés, alors on obtient une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ en posant : $e'' = e \wedge e'$, puis :

- $fog(e) = f(-e) = -e$, et : $gof(e) = g(e) = -e$,
- $fog(e') = f(e') = -e'$, et : $gof(e') = g(-e') = -e'$,
- $fog(e'') = f(-e'') = -(-e'') = e''$, et : $gof(e'') = g(-e'') = -(-e'') = e''$,

et f et g commutent : c'est le retournement d'axe $Vect(e'')$.

b. Puisque u est sur l'axe Δ de f, alors : $f(u) = u$, et : $gof(u) = g(u) = fog(u) = f(g(u))$.
Donc $g(u)$ est un vecteur unitaire (puisque g est une isométrie), invariant par f donc sur Δ.
Donc $g(u)$ est l'un des deux vecteurs : u ou $-u$, seuls vecteurs de norme 1 sur Δ.

c. Si : $g(u) = u$, alors u est invariant par g qui admet comme seuls vecteurs invariants les vecteurs de son axe (car : $g \neq id_E$), et donc u est sur l'axe de g : f et g ont donc même axe.

d. Si : $g(u) = -u$, alors -1 est valeur propre de g.
Or en reprenant la matrice de g donnée dans la question a. on constate que ceci n'est possible que si :

- l'angle de la rotation g est π (donc g est un retournement),
- u est orthogonal à l'axe Δ' du retournement g, autrement dit Δ est orthogonal à Δ'.

Mais on a aussi, en notant v un vecteur de Δ', que : $f(g(v)) = f(v) = g(f(v))$,
et donc $f(v)$ est sur l'axe Δ'.
Donc : $f(v) = v$, ou : $f(v) = -v$,
pour des raisons identiques à celles de la question c.
Mais on ne peut être dans le premier cas, car alors f admettrait deux vecteurs propres pour la valeur propre 1 (à savoir u et v), et formant une famille libre car non nuls et orthogonaux.
Or ceci ne peut se produire que si : $f = id_E$, ce qui n'est pas le cas ici.
Donc : $f(v) = -v$,
et la même remarque que celle faite pour g au début de la question montre que f est également un retournement dont l'axe est bien orthogonal à celui de g.