Produit scalaire (corrigé niveau 1).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

1. a. Rappel : si on part d'une famille infinie, une combinaison linéaire des vecteurs de la famille ne peut dans tous les cas comporter qu'un nombre fini de coefficients non nuls.
   Autrement dit montrer qu'une famille infinie est libre est équivalent à montrer que toute sous-famille **finie** est libre.
   Soit alors $\mathcal{F}$ une famille orthonormale de vecteurs de E, et soit $(x_1,\dots,x_n)$ une sous-famille de $\mathcal{F}$.
   Alors cette famille est libre, puisque si : $\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n=0$, avec : $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n$, alors :
   $\forall\ 1\le i\le n,\ 0=(x_i|\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n)=\lambda_1.(x_i|x_1)+\dots+\lambda_n.(x_i|x_n)=\lambda_i.1=\lambda_i$.

   b. Si on reprend la démonstration précédente, elle s'adapte avec pour changement dans la dernière ligne :
   $\forall\ 1\le i\le n,\ 0=\lambda_i.(x_i|x_i)$.
   On distingue ensuite deux cas :
   - si la famille ne comporte pas le vecteur nul, alors on peut conclure à : $\forall\ 1\le i\le n,\ \lambda_i=0$.,

   et la famille est libre,
   - si la famille comporte le vecteur nul, alors elle est liée.

   Conclusion : une famille orthogonale est libre si et seulement si elle ne comporte pas le vecteur nul.

2. Toutes les propriétés pour faire de cette application un produit scalaire, lorsque l'on passe de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ à E se démontrent de la même façon sauf le caractère défini de la forme proposée.
   En effet, la fonction f, nulle sur [0,1[et valant 1 en 1 :
   - est continue par morceaux de [0,1] dans ℝ, donc appartient à E,
   - est non nulle,
   - et pourtant : $\int_0^1 f(t)^2.dt=0$.

   Donc on n'obtient pas un produit scalaire sur E.

3. a. Les matrices étant carrées et réelles, φ définit bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans ℝ.
   Puis : $\forall\ (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A,B)=tr({}^tA.B)=tr({}^t({}^tA.B))=tr({}^tB.A)=\varphi(B,A)$, et φ est symétrique.
   La linéarité de la trace et de la transposition montrent la linéarité de φ par rapport à B.
   On a par ailleurs : $\forall\ A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,A)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2\ge 0$.
   Enfin, au vu de la dernière expression, $\varphi(A)$ ne s'annule que si A est nulle.
   Donc φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   b. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à A et I_n, pour : $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Alors : $\varphi(I_n,A)=tr({}^tI_n.A)=tr(A)\le\sqrt{\varphi(I_n,I_n)}.\sqrt{\varphi(A,A)}=\sqrt{tr(I_n)}.\sqrt{tr({}^tA.A)}=\sqrt{n}.\sqrt{tr({}^tA.A)}$.
   Enfin les cas d'égalité correspondent aux cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit si et seulement si A et I_n sont liées.
   Et I_n étant non nulle, c'est encore équivalent au fait que A est une matrice scalaire soit :
   $\exists\ \lambda\in\mathbb{R},\ A=\lambda.I_n$.

4. a. On peut écrire : $\forall\ (f,g)\in E^2,\ (|f|-|g|)^2\ge 0$, et donc : $f^2+g^2-2.|f.g|\ge 0$.
   Donc : $|f.g|\le\frac{1}{2}.(f^2+g^2)$, et par comparaison de fonctions positives, $f.g$ est intégrable sur I.

   b. E est inclus dans $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ qui est un ℝ-espace vectoriel.
   La fonction nulle est continue de $\mathbb{R}^+$ dans ℝ et est évidemment de carré intégrable sur I.
   Pour : $f\in E$, et : $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction : $(\lambda.f)^2=\lambda^2.f^2$, est intégrable sur I, donc $\lambda.f$ est de carré intégrable sur I.
   Enfin : $\forall\ (f,g)\in E^2,\ (f+g)^2=f^2+g^2+2.f.g$,

et comme somme de fonctions intégrables sur I et $f+g$ est de carré intégrable sur I.
Finalement E est un sous espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

c. L'application proposée est bien définie sur E^2 d'après la question a.
Elle est évidemment symétrique, bilinéaire et positive puisque :
$\forall f \in$ E, $\int_I f(t)^2.dt \geq 0$, comme intégrale convergente d'une fonction positive.
Enfin, si : $\int_I f(t)^2.dt = 0$, alors f est nulle car f^2 est continue et positive sur I.
Finalement : $(f,g) \mapsto \int_I f(t).g(t).dt$, définit bien un produit scalaire sur E.

5. a. On peut écrire : $(u,v) \in E^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(|u_n|-|v_n|)^2 \geq 0$, et donc : $u_n^2+v_n^2-2.|u_n.v_n| \geq 0$.
Donc : $|u_n.v_n| \leq \frac{1}{2}.(u_n^2+v_n^2)$, et par comparaison de série à termes positifs, $\sum_{n\geq 0}|u_n.v_n|$ converge.
Puis E est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et est non vide puisque la suite nulle est dans E.
Ensuite, pour : $\lambda \in \mathbb{R}$, et : $u \in$ E, la série $\sum_{n\geq 0}\lambda^2.u_n^2$ est évidemment convergente.
Enfin pour : $(u,v) \in E^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n+v_n)^2 = u_n^2+v_n^2+u_n.v_n$,
et la série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)^2$ converge comme somme de trois séries convergentes.
Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. L'application : $(u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}u_n.v_n$, est bien définie sur E^2 d'après la question a.
De plus, elle est évidemment symétrique et bilinéaire, et positive car :
$\forall u \in$ E, $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2 \geq 0$, comme somme d'une série à termes positifs et :
si : $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2 = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = 0$, donc : $u_n = 0$, et : $u = 0$.
Donc on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

6. a. E est inclus dans $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois habituelles.
De plus E est non vide puisque la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ est clairement dans E.
Enfin, si f et g sont dans E, alors : $\exists (n_f,n_g) \in \mathbb{Z}^2$, $\lim_{t\to+\infty} t^{n_f}.f(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{n_g}.g(t) = 0$.
On note alors : $n = \min(n_f,n_g)-1 \in \mathbb{Z}$, et pour : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\lambda.f+\mu.g \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$,
- $\lim_{t\to+\infty} t^n.(\lambda.f(t)+\mu.g(t)) = \lambda.\lim_{t\to+\infty} t^{n-n_f}.t^{n_f}.f(t) + \mu.\lim_{t\to+\infty} t^{n-n_g}.t^{n_g}.g(t) = 0$,

comme somme de produits de fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$ (car : $n-n_f < 0$, et : $n-n_g < 0$).
On constate ainsi que E est stable par combinaison linéaire ce qui en fait un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. L'application proposée est définie sur E.
En effet, avec les mêmes notations : $\forall (f,g) \in E^2$, $t^2.f(t).g(t).e^{-t} = [t^{n_f}.f(t)].[t^{n_g}.g(t)].[t^{2-n_f-n_g}.e^{-t}]$,
et : $\lim_{t\to+\infty} t^2.f(t).g(t).e^{-t} = 0$,
puisque les trois termes qui apparaissent au-dessus tendent vers 0 en $+\infty$.
Puis elle est symétrique par évidence, et bilinéaire, par linéarité de l'intégrale.
Enfin : $\forall f \in$ E, $\int_0^{+\infty} f(t)^2.e^{-t}.dt \geq 0$,
par positivité de l'intégrale, et si on a : $\int_0^{+\infty} f(t)^2.e^{-t}.dt = 0$,
alors la fonction sous l'intégrale étant continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que :
$\forall$ t $\in [0,+\infty)$, $f(t)^2.e^{-t} = 0$, donc : $f(t) = 0$, et : $f = 0$.

c. Il est immédiat que $\sin$ et $\cos$ sont dans E, avec : $n = -1$.

On peut trouver une base orthonormale de $Vect(\sin,\cos)$ en posant :

- $f_1 = \sin$, puis :
- $f_2 = \cos + \lambda.\sin$, et on détermine λ avec la condition : $\int_0^{+\infty} \sin(t).[\cos(t) + \lambda.\sin(t)].e^{-t}.dt = 0$.

En linéarisant et en passant en exponentielles, on a :

- $\int_0^{+\infty} \sin(t).\cos(t).e^{-t}.dt = \frac{1}{2}.\int_0^{+\infty} \sin(2.t).e^{-t}.dt = \frac{1}{2}.\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+2.i).t}.dt\right) = \frac{1}{2}.\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-1+2.i).t}}{-1+2.i}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{5}$,
- $\int_0^{+\infty} \sin^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2.t)}{2}.e^{-t}.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+2.i).t}.dt\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+2.i).t}}{-1+2.i}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{2}{5}$.

On choisit donc : $\lambda = -\frac{1}{2}$, et : $f_2 = \cos - \frac{1}{2}.\sin$.

Enfin, on calcule les normes de ces vecteurs :

- $\int_0^{+\infty} f_1^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} \sin^2(t).e^{-t}.dt = \frac{2}{5}$, donc on pose : $g_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}.\sin$,
- $\int_0^{+\infty} f_2^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} [\cos^2(t) - \sin(t).\cos(t) + \frac{1}{4}.\sin^2(t)].e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}.\frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

soit donc : $g_2 = \sqrt{2}.[\cos - \frac{1}{2}.\sin]$,

et (g_1, g_2) est une base orthonormale de $Vect(\sin,\cos)$.

7. Il suffit, pour : $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, strictement positive sur $[a,b]$, d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, et :

$$\int_a^b \sqrt{f(t)}.\frac{1}{\sqrt{f(t)}}.dt = (b-a) \le \sqrt{\int_a^b \sqrt{f(t)}^2.dt}.\sqrt{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(t)}^2}.dt} = \sqrt{\int_a^b f(t).dt}.\sqrt{\int_a^b \frac{1}{f(t)}.dt},$$

et de passer au carré, sachant que toutes les quantités dans l'inégalité sont positives.

Il y a égalité si et seulement si les deux fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont liées, et puisque les fonctions sont non nulles, cela s'écrit encore : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f} = \lambda.\frac{1}{\sqrt{f}}$, soit : $f = \lambda$.

Conclusion : il y a égalité si et seulement si f est constante et strictement positive.

8. Si on utilise le produit scalaire canonique dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$, alors pour : $f \in C^0[0,1],\mathbb{R})$, et : $g = 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\int_0^1 f(t).g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt \le \sqrt{\int_0^1 f(t)^2.dt}.\sqrt{\int_0^1 g(t)^2.dt} = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2.dt}.1 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2.dt},$$

soit l'inégalité demandée.

9. On utilise le produit scalaire canonique dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et f' donne :

$$\left(\int_a^b f(t).f'(t).dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f(t)^2.dt\right).\left(\int_a^b f'(t)^2.dt\right).$$

Or : $\int_a^b f(t).f'(t).dt = \left[\frac{f(t)^2}{2}\right]_a^b = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}$, donc on en déduit l'inégalité demandée.

10. Cherchons tout d'abord x colinéaire à a, donc de la forme : $x = \mu.a$.

Alors x est solution si et seulement si : $\mu.\|a\|^2 = \lambda$,

donc il y a une unique solution qui est : $x_0 = \dfrac{\lambda}{\|a^2\|}.a$.

Maintenant x dans E est solution si et seulement si : $(a|x) = \lambda = (a|x_0)$, ou encore : $(a|x - x_0) = 0$.

Conclusion : les solutions sont les vecteurs de la forme : $x = x_0 + y$, $y \in (Vect(a))^{\perp}$.

11. Raisonnons par double implication :

• si x et y sont orthogonaux, alors : ∀ λ ∈ ℝ, $\|x + \lambda.y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2.\|y\|^2 \geq \|x\|^2$, d'où le résultat.

• si : ∀ λ ∈ ℝ, $\|x\| \leq \|x + \lambda.y\|$, alors en passant au carré et en développant : $0 \leq 2.\lambda.(x|y) + \lambda^2.\|y\|^2$.

Dans ce cas, on en déduit que :

- si : λ > 0, $0 \leq 2.(x|y) + \lambda.\|y\|^2$, et en faisant tendre λ vers 0, on déduit que : $0 \leq (x|y)$,
- si : λ < 0, $0 \geq 2.(x|y) + \lambda.\|y\|^2$, et en faisant tendre λ vers 0, on en déduit que : $0 \geq (x|y)$,

donc finalement : $0 = (x|y)$.

Remarque : on peut aussi reprendre le principe de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en écartant d'abord le cas où : $\|y\| = 0$, (et dans ce cas : $y = 0$, et : $0 = (x|y)$) et dans le cas restant, le trinôme restant positif, son discriminant est négatif où nul, ce qui redonne : $0 = (x|y)$.

Espaces vectoriels euclidiens.

12. On peut penser à utiliser le procédé de Gram-Schmidt ou procéder de proche en proche.

En effet, le vecteur : $e_1 = (1,-1,0,...,0)$, est élément de H.

Si on cherche un vecteur e_2 dans H, orthogonal à e_1, on est amené à résoudre :

$x_1 - x_2 = 0$, et : $x_1 + ... + x_n = 0$, ce qui permet de proposer : $e_2 = (1,1,-2,0,...,0)$.

Supposons alors construits des vecteurs $e_1,...,e_p$, pour : $1 \leq p \leq n-2$, tels que :

∀ $1 \leq i \leq p$, $e_i = (1,...,1,-i,0,...,0)$, le $-i$ se trouvant en place $i+1$.

Trouver e_{p+1} dans H, orthogonal à tous ces vecteurs revient à résoudre :

$x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 - 2.x_3 = 0$, …, $x_1 + ... + x_p - p.x_{p+1} = 0$, et : $x_1 + ... + x_n = 0$,

et on peut proposer : $e_{p+1} = (1,...,1,-(p+1),0,...,0)$.

La famille $(e_1,...,e_{n-1})$ est alors une famille orthogonale de vecteurs de H, donc c'est une famille libre (puisqu'elle ne comporte pas le vecteur nul), et comme H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, la famille est une base orthogonale de H.

Il suffit de diviser alors chaque vecteur par sa norme pour obtenir une base orthonormale de H, ce qui donne : ∀ $1 \leq p \leq n-1$, $e_p = \dfrac{1}{\sqrt{p.(p+1)}}(1,...,1,-p,0,...,0)$.

13. Notons tout d'abord que f est bien une application linéaire de E dans E.

Puis : ∀ x ∈ E, $f(x) \in F = Vect(a,b)$.

Si λ est alors une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, on a : $f(x) = \lambda.x$.

On peut alors discuter deux cas :

• si : $\lambda = 0$, alors l'espace propre cherché (si 0 est valeur propre de f) est $\ker(f)$, et :

∀ x ∈ E, $(x \in \ker(f)) \Leftrightarrow ((a|x).a + (b|x).b = 0) \Leftrightarrow ((a|x) = (b|x) = 0) \Leftrightarrow (x \in Vect(a,b)^{\perp})$,

puisque a et b étant unitaires et orthogonaux, ils forment une famille libre.

Donc 0 est valeur propre de f si et seulement si : $\dim(E) \geq 3$, et dans ce cas l'espace propre associé est $Vect(a,b)^{\perp}$ qui est de dimension : $n - 2 \geq 1$.

• si : $\lambda \neq 0$, alors : $x = \frac{1}{\lambda}.f(x) \in Vect(a,b)$.

On cherche alors les vecteurs propres associés aux valeurs propres (éventuelles) non nulles de f en posant : $x = \alpha.a + \beta.b$, avec : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et en calculant :

$$f(x) = (a|\alpha.a + \beta.b).a + (b|\alpha.a + \beta.b).b = (\alpha.\|a\|^2 + \beta.(a|b)).a + (\alpha.(b|a) + \beta.\|b\|^2).b = \alpha.a + \beta.b = x,$$

et donc tout vecteur non nul de $Vect(a,b)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

1 est donc valeur propre de f.

On peut noter au passage que f est diagonalisable.

14. a. Soit : $1 \leq k \leq n$.

Alors : $\|e_k\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n} (e_k|e_i)^2 = \sum_{i \neq k} (e_k|e_i)^2 + 1$, donc tous les carrés étant positifs, ils sont nuls.

On vient de montrer que : $\forall\ 1 \leq i \neq k \leq n$, $(e_i|e_k) = 0$, et la famille est orthogonale.

Les vecteurs étant de plus unitaires, la famille est orthonormale.

b. Montrons que : $F^{\perp} = \{0\}$, et pour cela soit : $x \in F^{\perp}$.

Alors : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = 0$, puisque x étant orthogonal à F, il est orthogonal à tous les e_i.

Donc on en déduit bien : $x = 0$, puis : $F^{\perp} = \{0\}$.

Finalement : $F = (F^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$, et $(e_1, \ldots, e_n)$, comme base de F est une base de E.

15. Montrer que : $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$, et : $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

• Si : $x \in (F + G)^{\perp}$, alors : $\forall\ y \in F$, $(x|y) = (x|y + 0) = 0$, puisque : $y + 0 \in F + G$.

Donc : $x \in F^{\perp}$, et de manière symétrique : $x \in G^{\perp}$, d'où : $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

On vient de montrer que : $(F + G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Si : $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, alors : $\forall\ (y,z) \in F \times G$, $(x|y + z) = (x|y) + (x|z) = 0$, d'où : $x \in (F + G)^{\perp}$.

On vient de montrer que : $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F + G)^{\perp}$.

Finalement, on a bien égalité (et c'est valable dans tout espace préhilbertien en fait).

• Ensuite on commence par signaler que dans un espace euclidien, tout sous-espace vectoriel V vérifie : $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Puis avec ce qui précède : $(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp} = F \cap G$.

Donc : $(F \cap G)^{\perp} = ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$,

soit bien ce que l'on voulait démontrer.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

16. On pose :

• $e_1 = u = (1,1,1)$,

• $e_2 = v + \lambda.e_1$, et on détermine λ avec : $(e_1|e_2) = 0 = 1 + 3.\lambda$, soit : $\lambda = -\frac{1}{3}$, puis : $e_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

• $e_3 = v + \lambda.e_1 + \mu.e_2$, et les conditions d'orthogonalité donnent :

$(e_1|e_3) = 0 = 1 + 3.\lambda$, soit : $\lambda = -\frac{1}{3}$,

$(e_2|e_3) = 0 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3}.\mu$, soit : $\mu = \frac{1}{2}$, et donc : $e_3 = (1,0,-1)$.

On norme ensuite les vecteurs et on obtient la famille :

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Remarque : les produits scalaires $(u|\varepsilon_1), (v|\varepsilon_2), (w|\varepsilon_3)$ sont tous strictement positifs.

17. a. Le fait que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ soient supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un résultat classique.
De plus : $\forall\ (A,S) \in \mathcal{A}_n\times\mathcal{S}_n$,
$\varphi(A,S) = tr({}^tA.S) = -tr(A.S)$, et :
$\varphi(S,A) = tr({}^tS.A) = tr(S.A) = tr(A.S)$.
Mais ces deux quantités étant aussi égales (par symétrie de φ), on en déduit que : $\varphi(A,S) = 0$.
$\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont donc bien orthogonaux.
b. On se souvient que : $\forall\ 1 \le i,j,k,l \le n$, $E_{i,j}.E_{k,l} = \delta_{j,k}.E_{i,l}$.
Donc : ${}^tE_{i,j}.E_{k,l} = E_{j,i}.E_{k,l} = \delta_{i,k}.E_{j,l}$.
Puis : $(i \neq k) \Rightarrow ({}^tE_{i,j}.E_{k,l} = 0) \Rightarrow (\varphi(E_{i,j}.E_{k,l}) = tr(0) = 0)$,
et : $(i = k,\ j \neq l) \Rightarrow ({}^tE_{i,j}.E_{k,l} = E_{j,l}) \Rightarrow (\varphi(E_{i,j}.E_{k,l}) = tr(E_{j,l}) = 0$,
puisque le 1 n'est pas sur la diagonale,
et enfin : $(i = k,\ j = l) \Rightarrow ({}^tE_{i,j}.E_{k,l} = E_{j,j}) \Rightarrow (\varphi(E_{i,j}.E_{k,l}) = tr(E_{j,j}) = 1$.
Donc la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale pour ce produit scalaire.
c. Il faut donc trouver la projection orthogonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de M sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
Pour cela on se souvient que : $M = \frac{1}{2}.(M+{}^tM) + \frac{1}{2}.(M-{}^tM)$,
est la décomposition de M selon la somme directe (orthogonale) $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
Donc la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est $\frac{1}{2}.(M+{}^tM)$, et :
$$d(M,\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \left\| M - \frac{1}{2}.(M+{}^tM) \right\| = \frac{1}{2}.\left\| M-{}^tM \right\|.$$
On calcule alors : $M-{}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, et : $\|A\|^2 = \varphi(A,A) = tr({}^tA.A) = tr\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4$.
Finalement : $d(M,\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}.\sqrt{\varphi(A,A)} = \frac{1}{2}.2 = 1$.

18. a. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt sans normer les vecteurs, on obtient d'abord :
- $P_0 = 1$,
- $P_1 = X - \frac{1}{2}$,
- $P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

On calcule alors les normes de ces vecteurs : $\|P_0\|^2 = 1$, $\|P_1\|^2 = \frac{1}{12}$, $\|P_2\|^2 = \frac{1}{180}$, et on en déduit la base orthonormale : $(Q_0, Q_0, Q_0) = (1, \sqrt{3}.(2.X-1), \sqrt{5}.(6.X^2 - 6.X + 1))$.
b. On commence par interpréter la quantité cherchée.
Pour cela : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx = \left\| X^2 - (a.X+b) \right\|^2$, avec la norme associée, et :
$$\inf_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx = \inf_{P\in R_1[X]} \left\| X^2 - P \right\|^2 = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2.$$
On sait alors que cette distance est atteinte pour un unique polynôme, projection orthogonale de X^2 µ sur $\mathbb{R}_1$[X], et comme on dispose d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_1$[X], on sait de plus que :
$p(X^2) = (Q_0|X^2).Q_0 + (Q_1|X^2).Q_1$.

Il suffit de calculer alors : $(Q_0|X^2) = \int_0^1 1.t^2.dt = \frac{1}{3}$, et : $(Q_1|X^2) = \sqrt{3}.\int_0^1 (2.t^3 - t^2).dt = \frac{\sqrt{3}}{6}$, et :

$$p(X^2) = \frac{1}{3}.1 + \frac{\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}.(2.X - 1) = X - \frac{1}{6}.$$

Enfin, la distance cherchée vaut : $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| X^2 - (X - \frac{1}{6}) \right\| = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2.dt} = \frac{1}{6.\sqrt{5}}$, et

finalement : $\inf_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \frac{1}{180}$.

19. a. L'application proposée est définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.
En effet, si : $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, alors la fonction sous l'intégrale proposée est définie, continue sur [0,+∞)
et : $t \mapsto t^2.P(t).Q(t).e^{-t}$, tend vers 0 en +∞ (théorème des croissances comparées).
Donc l'intégrale correspondante est convergente et est réelle puisque P et Q sont à valeurs réelles.
La symétrie est par ailleurs immédiate, ainsi que la linéarité par rapport à Q (toutes les intégrales qui apparaissent par développement convergent).
L'application est de plus positive, car si : $P \in \mathbb{R}[X]$, alors P^2 est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Elle est enfin définie car si, pour : $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\int_0^{+\infty} P(t)^2.e^{-t}.dt = 0$, la fonction : $t \mapsto P(t)^2.e^{-t}$, étant positive et continue sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit qu'elle est nulle sur [0,+∞), et donc P aussi.
Comme polynôme, P admet alors une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

b. On commence par : $\forall\ n \geq 1$, $\int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt = [-t^n.e^{-t}]_0^{+\infty} + n.\int_0^{+\infty} t^{n-1}.e^{-t}.dt = n.\int_0^{+\infty} t^{n-1}.e^{-t}.dt$,
l'intégration par parties étant autorisée puisque la deuxième intégrale converge.
On en déduit par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt = n!.\int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = n!$.
Par conséquent : $\forall\ (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(X^p|X^q) = (p+q)!$.

c. On pose : $P_1 = 1$, qui est déjà normé puisque : $(1|1) = (X^0|X^0) = 0! = 1$,
puis : $P_2 = X - a$, et on calcule a pour que : $0 = (P_1|P_2) = (1|X) - a.(1|1) = 1! - a = 1 - a$
On prend donc : $a = 1$, soit : $P_2 = X - 1$.
Enfin : $P_3 = X^2 - a.X - b$, et on cherche a et b pour que :

- $0 = (P_1|P_3) = (1|X^2) - a.(1|X) - b.(1|1) = 2! - a.1! - b = 2 - a - b$, et :
- $0 = (P_2|P_3) = (X|X^2) - a.(X|X) - b.(X|1) - (1|X^2) + a.(1|X) + b.(1|1) = 4 - a$,

et on choisit donc : $a = 4$, $b = -2$, soit : $P_3 = X^2 - 4.X + 2$.
On norme pour finir les vecteurs et pour cela :

- $(P_2|P_2) = (X|X) - (1|X) - (X|1) + (1|1) = 2 - 1 - 1 + 1 = 1$, donc P_2 est normé,
- $(P_3|P_3) = 4$, et on prendra donc : $P_3 = \frac{X^2}{2} - 2.X + 1$.

d. Il suffit de trouver la projection orthogonale de X^3 sur : $F = Vect(1, X, X^2)$, puisque ce qu'on cherche, c'est $d(X^3, F)^2$.
Cette projection est le vecteur : $p_F(X^3) = (P_1|X^3).P_1 + (P_2|X^3).P_2 + (P_3|X^3).P_3$.
Après calcul des produits scalaires : $p_F(X^3) = 6.P_1 + 18.P_2 + 18.P_3 = 9.X^2 - 18.X + 6$,
et donc : $\inf_{(a,b,c)\in R^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - (a.t^2 + b.t + c))^2.dt = \left\| X^3 - p_F(X_3) \right\|^2 = \left\| X^3 - 9.X^2 + 18.x - 6 \right\|^2$.
On calcule cette dernière quantité en développant et à l'aide des intégrales de la question b.
On obtient : $\inf_{(a,b,c)\in R^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - (a.t^2 + b.t + c))^2.dt = 36$.

20. a. Si on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, alors on veut minimiser $\|Y-Z\|^2$, où :

$Y=(y_1,\dots,y_n)$, et : $Z=a.X+b.U=a.(x_1,\dots,x_n)+b.(1,\dots,1)=(a.x_1+b,\dots,a.x_n+b)$,

lorsque : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Donc on cherche : $\inf\limits_{Z\in P}\|Y-Z\|^2$ où : $P=Vect(X,U)$.

P est bien un plan car les x_i étant distincts deux à deux, X et U ne sont pas colinéaires.

b. La borne inférieure est atteinte en un unique vecteur Z qui est la projection orthogonale de Y sur P.

Si on note : $Z=a.X+b.U$, alors Z est caractérisé par : $(Y-Z|X)=0$, et : $(Y-Z|U)=0$.

Ceci conduit au système :

$(Y|X)=(Z|X)$, ou : $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i.y_i=a.(X|X)+b.(X|U)=a.\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b.\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, et :

$(Y|U)=(Z|U)$, ou : $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=a.(X|U)+b.(U|U)=a.\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b.n$.

Le déterminant de ce système vaut : $\begin{vmatrix}(X|X) & (X|U)\\ (X|U) & (U|U)\end{vmatrix}=(X|X).(U|U)-(X|U)^2\geq 0$,

car on reconnaît l'expression dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et il est non nul car les vecteurs sont non colinéaires.

Donc il y a une solution (ce que l'on savait déjà par projection orthogonale).

Remarque : la droite obtenue s'appelle droite des moindres carrés.

Projecteurs orthogonaux.

21. On peut traiter les deux questions en même temps.

Soit : $D=Vect(a)$.

Alors D admet pour base orthonormale : $e=\dfrac{a}{\|a\|}$, et donc :

$\forall\ x\in E$, $p_D(x)=(x|e).e=\dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}.a$, où on a noté p_D la projection orthogonale sur D.

Soit ensuite H un hyperplan de E, de vecteur normal a.

Alors : $E=H\overset{\perp}{\oplus}Vect(a)$, et tout vecteur x de E se décompose en : $x=p_H(x)+p_D(x)$,

où p_D est la projection orthogonale sur H.

Donc : $\forall\ x\in E$, $p_H(x)=x-p_D(x)=x-\dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}.a$.

22. a. On détermine d'abord une base orthogonale du plan en posant un premier vecteur du plan :

- $u_1=(1,1,0)$, et en cherchant : $u_2=(x,y,z)$, tel que :
- $x-y+z=0$, et : $(u_1|u_2)=0=x+y$, soit par exemple : $u_2=(1,-1,-2)$.

On norme alors ces vecteurs pour obtenir la base cherchée : $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right)$.

b. On peut alors déterminer cette projection p, soit par sa matrice dans la base canonique, soit par l'expression de l'image d'un vecteur u quelconque de $\mathbb{R}^3$, et par exemple :

$\forall\ u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $p(u)=(\varepsilon_1|u).\varepsilon_1+(\varepsilon_2|u).\varepsilon_2=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)+\dfrac{x-y-2.z}{\sqrt{6}}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)$,

soit : $p(u)=\left(\dfrac{2.x+y-z}{3},\dfrac{x+2.y+z}{3},\dfrac{-x+y+2.z}{3}\right)$.

On peut aussi en déduire la matrice de p dans la base canonique qui vaut : $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

23. a. On peut calculer cette matrice dans une base adaptée puis utiliser un changement de base.
On peut aussi déterminer une base orthonormale de F (qui est un plan, comme intersection de deux hyperplans non parallèles) en remarquant que : $F = Vect((1,0,-1,0), (0,1,0,-1))$,
et cette base étant orthogonale, il suffit de normer les vecteurs, soit :
- $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$,
- $\varepsilon_2 = \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

On calcule alors les images des vecteurs de la base canonique à l'aide de $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, par exemple :

$$f((1,0,0,0)) = (\varepsilon_1|(1,0,0,0)).\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|(1,0,0,0)).\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\right),$$

de même pour les autres vecteurs et finalement : $mat_{\mathscr{B}}(f) = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Cette distance s'obtient à l'aide de la projection orthogonale du vecteur sur F qui vaut :
$f((1,2,3,4)) = (-1,-1,1,1)$, et : $d((1,2,3,4),F) = \|(1,2,3,4)-(-1,-1,1,1)\| = \sqrt{2^2+3^2+2^2+3^2} = \sqrt{26}$.

24. On calcule immédiatement : $A^2 = A$, donc p est un projecteur.
Puisque : $tr(A) = 2$, on en déduit que : $rg(p) = 2$,
et que p est une projection sur un plan P.
On détermine ce plan comme l'image de p, et : $P = Vect(5.i - 2.j + k, -2.i + 2.j + 2.k)$.
Enfin la direction de projection est donnée par le noyau de p qu'on détermine en résolvant le système : $A.X = 0$, qui donne : $\ker(p) = Vect(i + 2.j - k)$.
Enfin, on vérifie que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux en calculant :
- $(5.i - 2.j + k | i + 2.j - k) = 5 - 4 - 1 = 0$,
- $(-2.i + 2.j + 2.k | i + 2.j - k) = -2 + 4 - 2 = 0$.

p est bien la projection orthogonale de E sur P.

Matrices symétriques réelles.

25. La matrice A est symétrique réelle, donc on <u>peut</u> la diagonaliser par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale.
Son polynôme caractéristique vaut : $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)^2.(\lambda+3)$.
L'espace propre de l'endomorphisme u canoniquement associé A, pour la valeur propre 3 est le plan d'équation : $x + y + z = 0$, et celui correspondant à la valeur propre -3 est la droite dirigée par le vecteur $(1,1,1)$.
Ils sont bien orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
On choisit alors une base orthogonale de chacun des sous-espaces propres :
- $(1,1,1)$ pour la droite,
- un premier vecteur $(1,-1,0)$ dans le plan et un autre vérifiant : $x + y + z = 0$, et : $x - y = 0$, soit par exemple le vecteur $(1,1,-2)$.

En réunissant ces deux bases, on obtient une base orthogonale de l'espace $\mathbb{R}^3$, qu'il suffit de normer pour obtenir une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.

On pose alors : $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, matrice orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$ (la base canonique et la base $\mathscr{B}$), et : ${}^tP.A.P=D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

26. La matrice étant symétrique réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles ainsi donc que toutes les racines de son polynôme caractéristique.
Donc : $\det(A+iI_n)=\chi_A(-i)\neq 0$,
et la matrice $A+iI_n$ est inversible.

27. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et U et V les matrices représentatives de u et de v dans $\mathscr{B}$.
U et V sont alors symétriques.
Puis : (uov symétrique) $\Leftrightarrow$ ($mat_{\mathscr{B}}(uov)=U.V$, est symétrique) $\Leftrightarrow$ ($U.V={}^t(U.V)={}^tV.{}^tU=V.U$)
$\Leftrightarrow$ (u et v commutent).

28. c. Soit : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et à valeurs propres positives.
Montrer qu'il existe : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $M={}^tA.A$.

a. Comme A est réelle, la matrice ${}^tA.A$ est une matrice réelle et : ${}^t({}^tA.A)={}^tA.{}^t({}^tA)={}^tA.A$.
Donc ${}^tA.A$ est symétrique et ses valeurs propres sont réelles.
De plus, soit : $\lambda\in Sp(A)$, et : $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0$, telle que : $({}^tA.A).X=\lambda.X$.
Alors : ${}^tX.({}^tA.A).X=\lambda.{}^tX.X$, ce qui s'écrit encore : $\|A.X\|^2=\lambda.\|X\|^2$,
pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On en déduit, X étant non nul, que : $\lambda=\dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2}\geq 0$.

b. Commençons par remarquer que : $\det({}^tA.A)=\prod_{\lambda\in Sp(A)}\lambda=\det({}^tA).\det(A)=(\det(A))^2$.
Il y a donc équivalence entre :
- A n'est pas inversible,
- $\det(A)=0$,
- l'une des valeurs propres de ${}^tA.A$ est nulle.

Comme on sait déjà que ces valeurs propres sont toutes positives, on en déduit l'équivalence voulue.

c. On sait qu'il existe : $P \in$ O(n), et : $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, telles que : $M=P.D.{}^tP$,
et où les valeurs λ_i sont positives.
On pose ensuite : $\Delta=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, puis : $A=P.\Delta.{}^tP$.
On constate alors que : ${}^tA.A={}^t(P.\Delta.{}^tP).(P.\Delta.{}^tP)=P.\Delta^2.{}^tP=P.D.{}^tP=M$,

en utilisant le fait que Δ est diagonale donc égale à sa transposée.

29. a. B étant clairement réelle et symétrique, ses valeurs propres sont réelles.
On notera par ailleurs α la plus grande valeur propre de B et β la plus petite.

b. On constate que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X \in \mathbb{R}$, et donc : ${}^tX.A.X = {}^t({}^tX.A.X) = {}^tX.{}^tA.X$.

D'où : ${}^tX.B.X = \frac{1}{2}.({}^tX.A.X + {}^tX.{}^tA.X) = {}^tX.A.X$.

c. Etant symétrique réelle, on peut diagonaliser B par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale P.
Donc : $\exists\ D \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$, ${}^tP.B.P = D$.
Alors : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X = {}^tX.B.X = {}^tX.{}^tP.D.P.X$.

Si on note : $Y = P.X$, on a : ${}^tX.{}^tP.D.P.X = {}^tY.D.Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2$,

et donc : $\alpha.\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2 \le \beta.\sum_{i=1}^{n} y_i^2$,

où on a noté $\lambda_1,...,\lambda_n$ les valeurs propres de B, soit encore les éléments diagonaux de D.

Enfin : $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = {}^tY.Y = {}^tX.{}^tP.P.X = {}^tX.X$, puisque P est orthogonale.

Finalement, on a bien : $\alpha.{}^tX.X \le {}^tX.A.X \le \beta.{}^tX.X$.

d. Soit enfin λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul).
Alors : ${}^tX.A.X = {}^tX.\lambda.X = \lambda.{}^tX.X = \lambda.\|X\|^2$.

La double inégalité précédente se réécrit alors en : $\alpha.\|X\|^2 \le \lambda.\|X\|^2 \le \beta.\|X\|^2$.

En divisant par $\|X\|^2$, on conclut que : $\lambda \in [\alpha,\beta]$.

30. a. Soit : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On a évidemment : ($A.X = 0$) $\Rightarrow$ (${}^tA.A.X = 0$).
- Réciproquement, si : ${}^tA.A.X = 0$, alors en multipliant par ${}^tX$, on obtient :
$0 = {}^tX.{}^tA.A.X = {}^t(A.X).(A.X) = \|A.X\|^2$, où $\|\ .\ \|$ désigne la norme canonique dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc : $A.X = 0$, et l'implication réciproque est démontrée.

b. L'équivalence précédente est en fait : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ($X \in \ker(A)$) $\Leftrightarrow$ ($X \in \ker({}^tA.A)$),
donc : $\ker(A) = \ker({}^tA.A)$.
On en déduit que : $rg(A) = n - \dim(\ker(A)) = n - \dim(\ker({}^tA.A)) = rg({}^tA.A)$.

Remarque : il est courant de remplacer petit à petit les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ par leur matrice canoniquement associée.

31. B est symétrique réelle donc diagonalisable.
Si D désigne une matrice diagonale semblable à B, alors puisque B vérifie une relation du type : $B^k = 0$, la matrice D vérifie elle aussi : $D^k = 0$.
Or les éléments diagonaux de D^k sont les éléments diagonaux de D élevés à la puissance k ils sont tous nuls et D est la matrice nulle.
En conséquence, on a aussi : $B = 0$, d'où : ${}^tA = -A$, et A est antisymétrique.

32. A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et ses valeurs propres sont réelles.
De plus, on dispose d'un polynôme annulateur pour A, à savoir $X^k - 1$, et les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme, donc sont des racines de l'unité.
Or les seuls réels qui sont des racines de l'unité sont 1 et -1.
Donc A est semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont ± 1.
Par conséquent, D vérifie : $D^2 = I_n$, et A vérifie la même relation.

Endomorphismes orthogonaux.

33. a. Pour : $x \in F^{\perp}$, on a : $\forall\ y \in F$, $(x|y) = 0$, et donc : $(u(x)|u(y)) = 0$.

Donc : $\forall\ z \in u(F)$, $\exists\ y \in F$, $z = u(y)$, et : $(u(x)|z) = 0$, donc : $u(x) \in (u(F))^{\perp}$.

On vient de montrer que : $u(F^{\perp}) \subset (u(F))^{\perp}$.

De plus, u étant un endomorphisme orthogonal, il est bijectif et conserve la dimension des sous-espaces vectoriels (il transforme toute famille libre en une famille libre), donc :

- $\dim(u(F^{\perp})) = \dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$, et
- $\dim((u(F))^{\perp}) = \dim(E) - \dim(u(F)) = \dim(E) - \dim(F)$.

L'inclusion précédente et l'égalité des dimensions permet de conclure à l'égalité : $u(F^{\perp}) = (u(F))^{\perp}$.

b. Montrons l'implication [⇒], et pour cela, supposons F stable par u.

Puisque u est un endomorphisme orthogonal, il conserve la dimension et : $\dim(u(F)) = \dim(F)$.

Comme de plus : $u(F) \subset F$, on en déduit que : $u(F) = F$.

Alors : $\forall\ x \in F^{\perp}$, $\forall\ z \in F$, $\exists\ y \in F$, $z = u(y)$, et : $(u(x)|z) = (u(x)|u(y)) = (x|y) = 0$.

Donc : $u(x) \in F^{\perp}$, et $F^{\perp}$ est bien stable par u.

Enfin, pour l'implication réciproque [⇐] :

si $F^{\perp}$ est stable par u, alors : $(F^{\perp})^{\perp} = F$, est stable par u avec ce qui a été démontré dans l'implication directe.

34. On commence par remarquer que sous l'hypothèse faite sur f on a :

$\forall\ (x, y) \in$ E^2, $(f(x+y)|x+y) = 0 = (f(x)|x) + (f(y)|y) + (f(x)|y) + (f(y)|x) = (f(x)|y) + (f(y)|x)$.

Donc : $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Soit maintenant : $x \in \ker(f)$, et : $z \in \mathrm{Im}(f)$.

Alors : $\exists\ y \in E$, $z = f(y)$, et : $(x|z) = (x|f(y)) = -(f(x)|y) = (0|y) = 0$.

Donc : $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)^{\perp}$,

et le théorème du rang donne : $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)^{\perp})$.

Donc : $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$, et comme E est de dimension finie : $\ker(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$.

35. Soient : $y \in \ker(f - id_E)$, et : $z \in \mathrm{Im}(f - id_E)$.

Alors : $\exists\ x \in E$, $z = (f - id_E)(x) = f(x) - x$, et : $f(y) = y$.

Donc : $(y|z) = (y|f(x) - x) = (y|f(x)) - (y|x) = (f(y)|f(x)) - (y|x) = 0$,

car f est un endomorphisme orthogonal et il conserve le produit scalaire.

On en déduit que les espaces $\ker(f - id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - id_E)$ sont orthogonaux donc en somme directe.

De plus : $\dim(\ker(f - id_E)) + \dim(\mathrm{Im}(f - id_E)) = \dim(E)$.

Conclusion : ils sont bien supplémentaires orthogonaux dans E.

36. a. Il est immédiat que f_α est toujours linéaire.

Puis : $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_\alpha o f_\beta(x) = f_\alpha(x + \beta.(a|x).a) = x + \beta.(a|x).a + \alpha.(a|x + \beta.(a|x).a).a$.

Et comme a est unitaire : $f_\alpha o f_\beta(x) = x + (\alpha + \beta + \alpha.\beta).(a|x).a = f_{\alpha+\beta+\alpha.\beta}(x)$.

b. Soit : $x \in$ E.

On a alors : ($f_\alpha(x) = 0$) ⇔ ($x = -\alpha.(a|x).a$), et donc x est colinéaire à a.

Pour : $x = \lambda.a$, on constate que : $f_\alpha(x) = (1+\alpha).\lambda.a$.

Donc :

- si : $\alpha \neq -1$, on a : ($f_\alpha(x) = 0$) ⇒ ($\lambda = 0$) ⇒ ($x = 0$), et donc f_α est injective, donc bijective.
- si : $\alpha = -1$, alors : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(\lambda.a) = 0$, et par double inclusion : $\ker(f_\alpha) = Vect(a)$.

Dans ce dernier cas, f_α n'est donc pas injective, donc pas injective et on a bien l'équivalence :

(f_α bijective) $\Leftrightarrow$ ($\alpha \neq -1$).

c. Pour : $\lambda \in \mathbb{R}$, et : $x \in$ E, x non nul, on a : ($f_\alpha(x) = \lambda.x$) $\Leftrightarrow$ ($(1-\lambda).x = \alpha.(a|x).a$).

On distingue à nouveau deux cas :

- si : $\alpha = 0$, alors : $\lambda = 1$, est la seule valeur propre possible de f_α est comme dans ce cas : $f_\alpha = id_E$, 1 est effectivement valeur propre de f_α et son espace propre associé est E.
- si : $\alpha \neq 0$, alors :

- si : $\lambda \neq 1$, alors x est colinéaire à a, et en notant : $x = \mu.a$, on constate que : $f_\alpha(\mu.a) = (1+\alpha).\mu.a$, autrement dit $(1+\alpha)$ est valeur propre de f_α et son espace propre associé est $Vect(a)$.

- si : $\lambda = 1$, alors : ($f_\alpha(x) = x$) $\Leftrightarrow$ ($\alpha.(a|x).a = 0$) $\Leftrightarrow$ ($(a|x) = 0$).

Autrement dit pour : $n \geq 2$, 1 est valeur propre de f_α et son espace propre associé est $(Vect(a))^\perp$.

37. On va raisonner par double implication.

- Si f est une symétrie orthogonale, alors : $f^2 = id_E$, et donc f est diagonalisable puisque $X^2 - 1$ est annulateur pour f, scindé à racines simples.
- Si f est à la fois orthogonal et diagonalisable, alors soit : $\lambda \in Sp(f)$, et x un vecteur propre associé.

On a : $f(x) = \lambda.x$, donc : $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$,

et x étant non nul, on en déduit : $|\lambda| = 1$.

Les seules valeurs propres possibles de f sont donc 1 et -1, et la matrice D de f dans une base de vecteurs propres est diagonale.

Puisque ses éléments diagonaux valent 1 ou -1, on a : $D^2 = I_n$, et f vérifie aussi : $f^2 = id_E$.

f est donc une symétrie.

Soient maintenant : $x \in \ker(f - id_E)$, et : $y \in \ker(f + id_E)$.

Alors : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$,

car f est orthogonal, mais aussi : $(f(x)|f(y)) = (x|-y) = -(x|y)$

car : $f(x) = x$, et : $f(y) = -y$.

On en déduit que : $(x|y) = 0$, et x et y sont orthogonaux.

Les deux espaces qui définissent la symétrie sont donc orthogonaux et la symétrie est orthogonale.

Matrices orthogonales.

38. On connaît la forme des matrices orthogonales 2×2.

- Parmi les matrices de rotation, de la forme : $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, les matrices symétriques sont celles pour lesquelles : $\sin(\theta) = -\sin(\theta)$, autrement dit celles telles que : $\sin(\theta) = 0$, donc : $\theta = 0\ (\pi)$.

Il y en a donc deux qui sont I_2 et $-I_2$.

Les matrices de symétrie : $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, sont elles, toutes symétriques.

- Parmi les matrices de rotation, les matrices antisymétriques sont celles pour lesquelles : $\cos(\theta) = 0$, autrement dit celles telles que : $\theta = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

Il y en a deux qui sont $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Parmi les matrices de symétrie : $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, celles qui sont antisymétriques sont celles telles que : $\sin(\theta) = -\sin(\theta)$, et : $\cos(\theta) = 0$, soit telles que : $\sin(\theta) = \cos(\theta) = 0$, donc il n'y en a pas.

39. En remarque préliminaire, on va fixer dans E une base orthonormale : $\mathscr{B} = (i, j)$.

Pour : $f \in O(E)$, on note : $M = mat_{\mathscr{B}}(f)$.

Alors : ($f \in C$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\ A \in O(2)$, $A.M = M.A$).

Puis le produit de deux matrices de rotation donne :

$\forall\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, si on note : $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors : $A(\theta).A(\theta') = A(\theta+\theta') = A(\theta').A(\theta)$.

Donc deux matrices de rotation commutent toujours.

Pour deux matrices de symétrie, on a :

$\forall\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, si on note : $B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors : $B(\theta).B(\theta') = A(\theta-\theta')$.

Donc elles commutent si et seulement si : $A(\theta-\theta') = A(\theta'-\theta)$, soit : $\theta-\theta' = 0\ (\pi)$, ou : $\theta = \theta'\ (\pi)$.

Comme ce n'est pas toujours le cas, aucune matrice de symétrie ne commute avec toutes les autres.

Donc une matrice orthogonale qui commute avec toutes les autres est une matrice de rotation.

Enfin, le produit d'une matrice de rotation et d'une matrice de symétrie donne :

$\forall\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $A(\theta).B(\theta') = B(\theta'+\theta)$, et : $B(\theta').A(\theta) = B(\theta'-\theta)$.

Donc $A(\theta)$ commute avec toutes les matrices $B(\theta')$ si et seulement si :

$\forall\ \theta' \in \mathbb{R}$, $B(\theta'+\theta) = B(\theta'-\theta)$, soit : $\theta'+\theta = \theta'-\theta\ (2.\pi)$, ou encore : $\theta = 0\ (\pi)$.

Donc les seules matrices orthogonales qui commutent avec toutes les autres sont I_2 et $-I_2$.

En revenant aux endomorphismes, on en déduit que : $C = \{id_E, -id_E\}$.

40. Si A est triangulaire supérieure et orthogonale, notons C_k ses colonnes.

Alors pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), on a :

- $\|C_1\|^2 = 1 = a_{1,1}^2$, donc : $a_{1,1} = \pm 1$, et :
- $\forall\ 2 \le i \le n$, $(C_1|C_i) = 0 = a_{1,1}.a_{1,i} = \pm a_{1,i}$, donc : $a_{1,i} = 0$.

Puis :

- $\|C_2\|^2 = 1 = a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2$, et comme : $a_{1,2} = 0$, on en déduit que : $a_{2,2} = \pm 1$, et :
- $\forall\ 3 \le i \le n$, $(C_2|C_i) = 0 = a_{2,2}.a_{2,i} = \pm a_{2,i}$, donc : $a_{2,i} = 0$.

Par récurrence, on montre alors que :

$\forall\ 1 \le j \le n$, $\forall\ 1 \le i \le j-1$, $a_{j,i} = 0$, et : $a_{j,j} = \pm 1$.

Autrement dit la matrice A est diagonale, avec comme éléments diagonaux des 1 ou -1.

Réciproquement, de telles matrices sont bien triangulaires supérieures et orthogonales.

Il y en a donc 2^n.

41. a. En notant X le vecteur proposé, on a : $A.X = Y$, avec : $\forall\ 1 \le i \le n$, $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$, et :

$${}^tX.A.X = \alpha \text{, avec : } \alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(1.\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\right) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} \text{, autrement dit : } {}^tX.A.X = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}.$$

b. Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs X et $A.X$ dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

Alors : $|(X|A.X)| = |{}^tX.A.X| \le \|X\|.\|A.X\|$.

Or A étant une matrice orthogonale, (et au besoin en revenant à l'endomorphisme u canoniquement associé qui est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique), on a :

$\|X\| = \sqrt{1+\ldots+1} = \sqrt{n}$, et : $\|A.X\| = \|X\| = \sqrt{n}$, d'où on déduit : $\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}\right| \le \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$.

Isométries en dimension 3, produit vectoriel.

42. Pour les quatre matrices proposées on peut calculer les produits ${}^tA.A$, ${}^tB.B$, ${}^tC.C$ ou ${}^tD.D$ ou vérifier que les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne

canonique.
On constate ainsi que les trois matrices sont orthogonales.

- $\det(A) = 1$, et A représente donc une rotation u de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique.

L'axe Δ de cette rotation correspond aux vecteurs invariants par u qui sont donnés par : $A.X = X$.
Après résolution du système, on trouve : $\Delta = Vect((1,4,1))$.
L'angle θ de u est donné par : $2.\cos(\theta) + 1 = tr(u) = tr(A)$, soit : $\cos(\theta) = -1$, donc : $\theta = \pi$.
Donc u est un demi-tour (ou retournement) et il n'y a pas lieu de préciser ici le sens.
u est aussi une symétrie orthogonale par rapport à Δ (et u est diagonalisable car A est symétrique réelle).

- $\det(B) = -1$, et B représente la composée d'une rotation u par rapport à un axe Δ et de la symétrie orthogonale par rapport à : $P = \Delta^{\perp}$.

L'axe Δ correspond aux vecteurs changés en leur opposé qui sont donnés par : $B.X = -X$.
Après résolution du système, on trouve : $\Delta = Vect((-3,1,1))$.
L'angle θ de la rotation est donné par : $2.\cos(\theta) - 1 = tr(u) = tr(B)$, soit : $\cos(\theta) = \frac{5}{6}$, ou : $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.
Enfin, le sens de la rotation est déterminé par exemple à l'aide d'un vecteur de : $P = \Delta^{\perp}$ (qui ne subit que la rotation), par exemple avec : $e = (0,1,-1)$.
L'image de e vaut : $u(e) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, et : $e \wedge u(e) = \left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, qui est évidemment sur Δ.
Si donc on oriente Δ avec ce dernier vecteur (ou le vecteur $(-3,1,1)$ qui est colinéaire et de même sens), alors P est canoniquement orienté et la rotation dans P se fait dans le sens positif.

- $\det(C) = +1$, et C représente une rotation u de $\mathbb{R}^3$.

L'axe Δ de cette rotation correspond aux vecteurs invariants par u, donnés par : $C.X = X$.
Après résolution du système, on trouve : $\Delta = Vect((1,0,1))$.
L'angle θ de la rotation est donné par : $2.\cos(\theta) + 1 = tr(u) = tr(C)$, soit : $\cos(\theta) = 0$, et : $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Enfin, le sens de la rotation se détermine avec un vecteur orthogonal à Δ, par exemple : $e = (0,1,0)$.
L'image de e vaut : $u(e) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et : $e \wedge u(e) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, qui est évidemment sur Δ.
Si donc on oriente Δ avec ce dernier vecteur (ou le vecteur $(1,0,1)$ qui est colinéaire et de même sens), alors P est canoniquement orienté et la rotation dans P se fait dans le sens positif.

- $\det(D) = +1$, et D représente une rotation u de $\mathbb{R}^3$.

L'axe de la rotation correspond aux vecteurs invariants et vaut : $\Delta = Vect((1,1,0))$.
L'angle θ est donné par la trace et vaut : $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Le sens de la rotation se détermine en choisissant un vecteur orthogonal à Δ, par exemple : $e = (0,0,1)$.
L'image de e vaut : $u(e) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right)$, et : $e \wedge u(e) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0\right)$.
La rotation se fait donc dans le sens positif du plan si on choisit le vecteur $(1,1,0)$ pour orienter Δ.

43. Plusieurs méthodes sont possibles :
- utiliser la projection orthogonale (à l'aide d'une base orthonormale de P) et en déduire la symétrie orthogonale cherchée),
- trouver la matrice de la symétrie dans une base adaptée et en déduire à l'aide de formules de changement de base la matrice cherchée.

Par exemple, une base orthogonale de P est par exemple fournie avec :

- $(1,0,2) \in P$,
- on cherche : $(x, y, z) \in P$, orthogonal au précédent, donc vérifiant : $2.x + 3.y - z = 0$, et : $x + 2.y = 0$.

On peut ainsi proposer : $(-6,5,3)$.

On norme ces vecteurs, et on peut proposer comme base de P :

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \varepsilon_2 = \left(\frac{-6}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{3}{\sqrt{70}}\right).$$

On cherche alors une base orthonormale de $P^\perp$, par exemple : $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$.

Dans la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, la matrice de la symétrie vaut : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose alors : $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$, et la matrice cherchée est : $A = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, en utilisant :

$A = Q.A'.Q^{-1} = Q.A'.{}^tQ$.

On peut noter qu'on obtient bien une matrice orthogonale (c'est la matrice d'une isométrie), et elle est symétrique réelle, donc diagonalisable.

44. On commence par déterminer la matrice de cette rotation r dans une base adaptée.

Pour cela, on choisit un vecteur u orthogonal à w et de norme 1, par exemple : $u = \frac{1}{\sqrt{2}}.(i + j)$.

On constate que le vecteur w est normé, et on calcule : $v = w \wedge u$, qui permet d'obtenir avec (u,v,w) une base orthonormale directe de E.

Après calcul, on trouve : $v = \frac{1}{3.\sqrt{2}}.(1,-1,4)$.

Si on oriente : $\Delta = Vect(w)$, avec w, alors : $P = \Delta^\perp$, est orienté positivement avec (u,v).

On obtient ainsi : $mat_{(u,v,w)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et si on note : $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3.\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3.\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3.\sqrt{2}} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$, alors la matrice cherchée est : $mat_{\mathscr{B}}(r) = Q.A.Q^{-1} = Q.A.{}^tQ = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-13}{45} & \frac{8}{9} & \frac{-16}{45} \\ \frac{16}{45} & \frac{4}{9} & \frac{37}{45} \end{pmatrix}$.

45. On va plutôt montrer que l'application r définie par l'énoncé est bien la rotation annoncée.
Pour cela, on constate que r est bien linéaire (c'est immédiat par bilinéarité du produit scalaire et du produit vectoriel).
Cherchons alors la matrice de r dans une base bien choisie et pour cela soient v un vecteur de norme 1 et orthogonal à θ, et : $w = u \wedge v$.
Alors la famille (u,v,w) est bien libre (donc est une base de $\mathbb{R}^3$) et :

- $r(u) = (1-\cos(\theta)).1.u + \cos(\theta).u + \sin(\theta).u \wedge u = u$,
- $r(v) = (1-\cos(\theta)).0.u + \cos(\theta).v + \sin(\theta).u \wedge v = \cos(\theta).v + \sin(\theta).w$,
- $r(w) = (1-\cos(\theta)).0.u + \cos(\theta).w + \sin(\theta).u \wedge w = \cos(\theta).w - \sin(\theta).v$,

et la matrice de r dans la base (u,v,w) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

r est donc bien la rotation d'angle θ, d'axe dirigé et orienté par θ.

46. L'endomorphisme $ror'or^{-1}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ comme composée d'isométries.
De plus : $\det(ror'or^{-1}) = \det(r).\det(r').\det(r^{-1}) = +1$,
donc c'est une rotation de $\mathbb{R}^3$ qu'on va noter R.
Puis si on note w' un vecteur qui dirige et oriente l'axe Δ' de r', alors on a :
$R(r(w')) = ror'or^{-1}(r(w')) = ror'(w') = r(w')$,
et le vecteur $r(w')$ est invariant par la rotation R donc dirige l'axe de R.
Enfin : $tr(R) = tr(ror'or^{-1}) = tr(r')$.
Si alors on note θ, θ', Θ, les angles de r, r', R, alors : $2.\cos(\Theta)+1 = 2.\cos(\theta')+1$, et : $\theta' = \Theta$.
Donc R est la rotation d'angle θ' autour de : $\Delta = vect(r(w'))$.
On peut également préciser le sens de cette rotation : pour cela, on note (u',v',w') une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ (obtenue en complétant w' en une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$).
Dans cette base, la matrice de r' vaut : $mat_{(u',v',w')}(r') = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') & 0 \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc :

- $R(r(u')) = ror'or^{-1}(r(u')) = ror'(u') = r(\cos(\theta').u' + \sin(\theta').v') = \cos(\theta').r(u') + \sin(\theta').r(v')$,
- $R(r(v')) = -\sin(\theta').r(u') + \cos(\theta').r(v')$.

Or la famille $(r(u'), r(v'), r(w'))$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ puisque r est une rotation.
Donc la rotation R s'effectue dans le sens positif si on oriente son axe Δ avec w'.

47. a. On peut noter que f est évidemment un endomorphisme de E.
Puis : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $(f(x) = \lambda.x) \Leftrightarrow ((\lambda-1).x = a \wedge x)$.
Or le vecteur $(\lambda-1).x$ est ainsi à la fois colinéaire et orthogonal à x, donc il est nul.
On en déduit que : $(\lambda \neq 1) \Rightarrow (x = 0)$,
et donc tout réel λ distinct de 1 n'est pas valeur propre de f.
Puis pour : $\lambda = 1$, on a : $\forall x \in E$, $(f(x) = x) \Leftrightarrow (a \wedge x = 0) \Leftrightarrow (x \in Vect(a))$.
Conclusion : 1 est la seule valeur propre de f et l'espace propre associé est : $E_1(f) = Vect(a)$.

b. Soit : $\mathscr{B} = (i,j,k)$, une base orthonormale directe de E.
On note par ailleurs : $x = u.i + v.j + w.k$, et : $x' = u'.i + v'.j + w'.k$.
Alors : $x \wedge x' = (v.w' - v'.w).i + (w.u' - w'.u).j + (u.v' - u'.v).k$,
puis $x \wedge (x \wedge x')$ a pour coordonnées :

- $v.(u.v' - u'.v) - w.(w.u' - w'.u) = (u.u.u' + u.v.v' + u.w.w') - (u^2 + v^2 + w^2).u' = (x|x').u - \|x\|^2.u'$, selon i,
- $w.(v.x' - v'.w) - u.(u.v' - u'.v) = (x|x').v - \|x\|^2.v'$, selon j, et :
- $u.(w.u' - w'.u) - v.(v.w' - v'.w) = (x|x').w - \|w\|^2.w'$, selon k.

On en déduit bien que : $x \wedge (x \wedge x') = (x|x').x - \|x\|^2.x'$.

c. On commence par calculer :
$\forall x \in E$, $f^2(x) = (x + a \wedge x) + a \wedge (x + a \wedge x) = x + 2.a \wedge x + a \wedge (a \wedge x)$, et donc :
$f^2(x) = x + 2.a \wedge x + (a|x).a - \|a\|^2.x$.
Puis : $f^3(x) = (x + 2.a \wedge x + (a|x).a - \|a\|^2.x) + a \wedge (x + 2.a \wedge x + (a|x).a - \|a\|^2.x)$,
ce qui donne :

$$f^3(x) = (x + 2.a\wedge x + (a|x).a - \|a\|^2.x) + a\wedge x + 2.a\wedge(a\wedge x) - \|a\|^2.a\wedge x$$
$$= x + 3.a\wedge x + 3.(a|x).a - 3.\|a\|^2.x - \|a\|^2.a\wedge x.$$

On utilise alors les relations :

$a\wedge x = f(x) - x$, et :

$(a|x).a = f^2(x) - x - 2.a\wedge x + \|a\|^2.x = f^2(x) - x - 2.(f(x) - x) + \|a\|^2.x = f^2(x) - 2.f(x) + x + \|a\|^2.x$,

pour obtenir :

$$f^3(x) = (x + 2.a\wedge x + (a|x).a - \|a\|^2.x) + a\wedge x + 2.a\wedge(a\wedge x) - \|a\|^2.a\wedge x$$
$$= x + 3.(f(x) - x) + 3.(f^2(x) - 2.f(x) + x + \|a\|^2.x) - 3.\|a\|^2.x - \|a\|^2.(f(x) - x)$$
$$= 3.f^2(x) - (3 + \|a\|^2).f(x) + (1 + \|a\|^2).x.$$

Finalement : $\forall\ x \in$ E, $f^3(x) - 3.f^2(x) + (3 + \|a\|^2).f(x) - (1 + \|a\|^2).x = 0$,

et donc : $f^3 - 3.f^2 + (3 + \|a\|^2).f - (1 + \|a\|^2).id_E = 0$

ce qui fournit le polynôme annulateur pour f : $P = X^3 - 3.X^2 + (3 + \|a\|^2).X - (1 + \|a\|^2)$.

On retrouve le fait que : $P(1) = 1 - 3 + (3 + \|a\|^2) - (1 + \|a\|^2) = 0$,

donc que 1 est racine de P.

Enfin : $P = (X - 1).(X^2 - 2.X + 1 + \|a\|^2) = (X - 1).((X - 1)^2 + \|a\|^2)$.

Dans tous les cas, 1 est la seule racine réelle de P (puisque a est non nul) et c'est la seule valeur propre possible de f.