# Chapitre 3

# Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ses éléments sont appelés **scalaires**.

## I. Espaces vectoriels

### 1. Généralités

**Définition – Espace vectoriel**

Soit $E$ un ensemble non vide, muni de deux lois :
- Une loi interne notée $+$, de $E \times E$ à valeurs dans $E$,
- Une loi externe notée $\cdot$, de $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans $E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** si :
- Il existe un élément de $E$, noté $0_E$, tel que pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$,
- Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x + y = 0_E$ (le vecteur $y$ est alors appelé opposé de $x$ et noté $-x$),

pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,
- $x + y = y + x$ (commutativité de $+$),
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de $+$),
- $1 \cdot x = x$,
- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributivité à gauche de $\cdot$ sur $+$),
- $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributivité à droite de $\cdot$ sur l'addition de $\mathbb{K}$),
- $(\lambda\,\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (propriété d'associativité).

On dit aussi que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. S'il n'y a aucune ambiguïté sur les lois, on mentionne simplement $E$ au lieu de $(E, +, \cdot)$. Les éléments de $E$ sont appelés **vecteurs**.

Remarques

• On note très souvent $\lambda\, x$ au lieu de $\lambda \cdot x$. Il est d'usage de noter le scalaire à gauche et le vecteur à droite.

• Si un vecteur $x \in E$ apparaît des deux côtés d'une égalité de la forme $x + y = x + z$, alors par ajout de $-x$ à gauche et à droite, par commutativité et associativité de $+$, on peut simplifier l'égalité en « enlevant » $x$ des deux côtés.

• L'élément $0_E$ est unique : si $e \in E$ vérifie la même propriété que $0_E$, on a $e = e + 0_E = 0_E$.

• De même, l'opposé d'un vecteur $x \in E$ est unique : si $y \in E$ vérifie $x + y = 0_E$, alors par simplification, on a $y = -x$.

• D'après les propriétés ci-dessus, pour tout $x \in E$, $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc par simplification, on a $0 \cdot x = 0_E$.

Alors, $0_E = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x$, et donc $-x = (-1) \cdot x$.
De même, on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

**▶ Espaces vectoriels de référence**

Soient $n$, $p$ et $k$ trois entiers naturels non nuls.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à $n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $E^X = \mathcal{F}(X,E)$ des fonctions de $X$ dans $E$, où $X$ est un ensemble et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les opérations usuelles.
- L'ensemble $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues sur $I$, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Propriété/Définition – Combinaison linéaire**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit un vecteur $x$ de $E$ en posant

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p.$$

Les vecteurs de cette forme sont appelés **combinaisons linéaires** de $e_1,\dots,e_p$.

Remarque – Dans l'expression précédente, il est inutile de parenthéser car l'addition est associative. De même, l'ordre des termes est sans importance par commutativité.

**Définition – Sous-espace vectoriel**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un ensemble $F$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$, si $F \subset E$ et si $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. Pour cela, on utilise la propriété suivante :

**Propriété – Caractérisation des sous-espaces vectoriels**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si :

- $F \subset E$,
- $0_E \in F$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in F^2, \lambda x + y \in F$.

Remarque – Pour prouver que $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$, il suffit souvent de prouver que $0_E \notin F$. Par exemple, $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ A^2 = I_n\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple – $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**Exercice –** Quels sont parmi les ensembles suivants ceux qui sont des espaces vectoriels ?

- L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
- L'ensemble des solutions de $y'' + ay = 0$ où $a$ est une fonction continue.
- L'ensemble des solutions de $y'' + ay = b$ où, de plus, $b$ est une fonction continue non nulle.
- L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(1) = 0$, puis tels que $P(0) = 1$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]P$ des multiples d'un polynôme $P$.

**Propriété – Intersection de sous-espaces vectoriels**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $I$ un ensemble d'indices et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Démonstration – Bien sûr, $\bigcap_{i\in I} E_i$ est inclus dans $E$, et contient $0_E$ comme chacun des $E_i$. Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\bigcap_{i\in I} E_i$ et $\lambda$ un scalaire. Alors, pour tout $i \in I$, $x$ et $y$ appartiennent au sous-espace vectoriel $E_i$, et donc $\lambda x + y \in E_i$. Ainsi $\lambda x + y \in \bigcap_{i\in I} E_i$. ☐

**Propriété/Définition – Espace vectoriel engendré par une famille**

Soit $\mathcal{F} = (e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ auxquels appartiennent $e_1,\dots,e_p$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ; c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $E$ auquel appartiennent $e_1,\dots,e_p$.

Il est appelé **espace vectoriel engendré** par $\mathcal{F}$, et noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$.

Remarque – $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ existe toujours car $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ auquel appartiennent $e_1,\dots,e_p$.
L'intersection porte donc sur un ensemble d'indices non vide.

Démonstration – L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ auxquels appartiennent $e_1,\dots,e_p$ est un sous-espace vectoriel de $E$ d'après la propriété précédente. De plus, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ auquel appartiennent $e_1,\dots,e_p$, alors $F$ figure parmi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $E$ dont on fait l'intersection pour définir $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En particulier, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset F$, ce qui montre que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ auquel appartiennent $e_1,\dots,e_p$. ☐

**Propriété**

Soit $\mathcal{F} = (e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

Alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1,\dots,e_p$.

Démonstration – Soit $F$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1,\dots,e_p$. Il est immédiat de vérifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. De plus, $e_1,\dots,e_p$ appartiennent à $F$. On a donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset F$. Réciproquement, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ étant un sous-espace vectoriel de $E$ avec $e_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, toutes les combinaisons linéaires de $e_1,\dots,e_p$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, d'où $F \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. ☐

Exemple – Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{Vect}(I_3,M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dans toute la suite, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 2. Familles libres, génératrices, bases et dimension

**Définition – Familles libres, génératrices, bases**

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de $E$.

• On dit que $\mathcal{F}$ est **libre** si pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \ \lambda_i = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont **linéairement indépendants**.

Si elle n'est pas libre, on dit que la famille est **liée**, ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont **linéairement dépendants**. Ceci équivaut à l'existence d'une famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$.

• On dit que $\mathcal{F}$ est **génératrice** de $E$ si pour tout $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ telle que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$

Ceci équivaut à : $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. On dit également que $(e_1, \ldots, e_p)$ engendre $E$.

• On dit que $\mathcal{F}$ est **une base de** $E$ si elle est à la fois libre et génératrice de $E$.

Remarques

• Une famille où figure le vecteur nul est nécessairement liée.

• Une famille constituée d'un vecteur est liée si et seulement si ce vecteur est nul.

• Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille liée, alors l'un des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ est combinaison linéaire des autres : en effet, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $i \in [\![1,p]\!]$ tels que $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$, et alors

$$e_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j e_j.$$

En revanche, on ne peut pas affirmer que *n'importe lequel* des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ est combinaison linéaire des autres.

**Propriété – Famille de polynômes à degrés échelonnés (ou étagés)**

Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes tous non nuls et à degrés échelonnés, c'est-à-dire telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $\deg(P_i) < \deg(P_{i+1})$. Alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Démonstration – Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Tous les coefficients du polynôme $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$ sont donc nuls. La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ étant à degrés échelonnés, le coefficient dominant de ce polynôme est $\lambda_n a_n$, où $a_n$ est le coefficient dominant de $P_n$, non nul car $P_n$ est non nul. Donc $\lambda_n = 0$. En réitérant ce raisonnement, on obtient que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$, d'où le résultat.

On peut aussi rédiger ce raisonnement sans l'étape d'itération : on raisonne par l'absurde, en supposant que tous les $\lambda_i$ ne sont pas nuls ; on peut donc définir $i_0 = \max\{i \in [\![0,n]\!];\ \lambda_i \neq 0\}$ (maximum d'une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$). On raisonne alors comme ci-dessus : le coefficient dominant de $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$ est $\lambda_{i_0} a_{i_0}$, où $a_{i_0}$ est le coefficient dominant de $P_{i_0}$, non nul car $P_{i_0}$ est non nul. On en déduit que $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui contredit la définition de $i_0$. Donc tous les $\lambda_i$ sont nuls. $\square$

**Propriété/Définition**

La famille $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de $E$ si et seulement si tout élément de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1,\dots,e_p$.
Dans ce cas, si $x=\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, on dit que $x_1,\dots,x_p$ sont les **coordonnées** de $x$ dans la base $(e_1,\dots,e_p)$.

Démonstration laissée en exercice (elle est très semblable à une démonstration donnée ci-dessous, voir le paragraphe sur les sommes directes). □

**Définition – Espace de dimension finie**

On dit que $E$ est de **dimension finie** si $E$ admet une famille génératrice (finie). Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.

**Théorème de la base extraite**

Si $E \neq \{0_E\}$, alors de toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$ : si $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille génératrice de $E$, il existe une partie $I$ de $[\![1,p]\!]$ telle que $(e_i)_{i\in I}$ soit une base de $E$.

Démonstration – Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille génératrice de $E$. Si $(e_1,\dots,e_p)$ n'est pas libre, on doit avoir $p \geqslant 2$ : en effet, si l'on avait $p=1$, on aurait $e_1 = 0_E$ (car la famille $(e_1)$ est liée), et donc $E=\mathrm{Vect}(e_1)=\{0_E\}$, ce qui est exclu. Alors l'un des vecteurs de la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est combinaison linéaire des autres, d'après une remarque précédente. Quitte à renommer les éléments, on peut supposer que $e_p \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p-1})$, et alors $E=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p-1})$.

On a donc construit une famille génératrice de $E$ à $p-1$ éléments et on peut recommencer cette procédure. La procédure s'arrête nécessairement, car le nombre d'éléments de la famille construite décroît strictement à chaque étape. Lorsque la procédure s'arrête, la famille obtenue est libre ; c'est finalement une famille libre et génératrice de $E$, donc une base de $E$. □

Remarque – Dans la démonstration précédente apparaît une idée très souvent utilisée en algorithmique pour prouver qu'un algorithme se termine : on a utilisé un « variant de boucle », ici le nombre d'éléments de la famille.

Du théorème précédent, on déduit immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire**

Si $E \neq \{0_E\}$ et si $E$ est de dimension finie, alors $E$ possède des bases.

**Théorème de la base incomplète**

Si $E$ est de dimension finie, alors toute famille libre d'éléments de $E$ peut être complétée en une base de $E$. De plus, pour compléter une telle famille, on peut choisir les vecteurs parmi ceux d'une famille génératrice donnée à l'avance.

Démonstration – Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre d'éléments de $E$ et $(u_1,\dots,u_m)$ une famille génératrice de $E$ (une telle famille existe car $E$ est de dimension finie). Posons $F_0=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$.
• Si $u_1$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, alors on pose $e_{p+1}=u_1$ et $F_1=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$. La famille $(e_1,\dots,e_{p+1})$ ainsi construite est libre : en effet, soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i e_i = 0_E$. Si l'on avait $\lambda_{p+1} \neq 0$, on aurait $e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, ce qui est absurde. Ainsi

$\lambda_{p+1} = 0$, puis $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$, ce qui par liberté de $(e_1,\dots,e_p)$ entraîne que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ ; tous les $\lambda_i$ sont donc nuls.

- Si $u_1 \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, on ne complète pas la famille $(e_1,\dots,e_p)$, on pose $F_1 = F_0$.

On poursuit alors la procédure avec $u_2$, dont on teste l'appartenance à $F_1$, ce qui permet de définir $F_2$. On procède ainsi jusqu'à $u_m$.

À l'issue de l'étape $m$, on dispose donc d'une famille $(e_1,\dots,e_k)$ avec $k \geqslant p$, qui est libre, et telle que $u_1,\dots,u_m$ sont des éléments de $F_m = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$. Alors

$$E = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset E.$$

La famille $(e_1,\dots,e_k)$ est donc génératrice de $E$, et étant libre, c'est une base de $E$ ; de plus, elle a été construite en complétant la famille $(e_1,\dots,e_p)$ avec certains des vecteurs $u_1,\dots,u_m$. □

**Théorème**

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de $E$ et $(u_1,\dots,u_{p+1})$ une famille de vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$. Alors la famille $(u_1,\dots,u_{p+1})$ est liée.

Remarque – En particulier, si $E$ admet une famille génératrice finie $(e_1,\dots,e_p)$, alors une famille libre d'éléments de $E$ est composée d'au plus $p$ vecteurs.

Démonstration – On procède par récurrence sur $p$. Pour $p = 1$, le résultat est vrai car deux vecteurs colinéaires à un même vecteur $e_1$ sont linéairement dépendants. Supposons le résultat vrai pour un certain entier $p \geqslant 1$. Soient $p+2$ vecteurs $u_1,\dots,u_{p+2}$ engendrés par $p+1$ vecteurs $e_1,\dots,e_{p+1}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_{1,1}\, e_1 + \cdots + \lambda_{1,p+1}\, e_{p+1},\\
u_2 &= \lambda_{2,1}\, e_1 + \cdots + \lambda_{2,p+1}\, e_{p+1},\\
&\ \vdots\\
u_{p+2} &= \lambda_{p+2,1}\, e_1 + \cdots + \lambda_{p+2,p+1}\, e_{p+1},
\end{aligned}$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont des scalaires. Si $\lambda_{i,1} = 0$ pour tout $i$, alors $(u_1,\dots,u_{p+2})$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{p+1})$, donc est liée par hypothèse de récurrence. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $\lambda_{1,1} \neq 0$. Alors, grâce à $\lambda_{1,1}$, on élimine $e_1$ dans l'expression des vecteurs $u_2,\dots,u_{p+2}$ :

$$\begin{aligned}
u_2 - \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}}\, u_1 &\in \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{p+1}),\\
&\ \vdots\\
u_{p+2} - \frac{\lambda_{p+2,1}}{\lambda_{1,1}}\, u_1 &\in \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{p+1}).
\end{aligned}$$

On en déduit que les $p+1$ vecteurs

$$u_2 - \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}}\, u_1,\ \dots,\ u_{p+2} - \frac{\lambda_{p+2,1}}{\lambda_{1,1}}\, u_1$$

sont combinaisons linéaires des $p$ vecteurs $e_2,\dots,e_{p+1}$. Par hypothèse de récurrence, ils forment donc une famille liée. En écrivant une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs avec des coefficients non tous nuls, on voit alors que la famille $(u_1,\dots,u_{p+2})$ est liée. □

Remarque – Cette idée est à la base de l'algorithme de Gauss-Jordan, dont on rappelera le principe en détails dans le chapitre **Matrices**.

**Théorème/Définition – Dimension**

• Si $E \neq \{0_E\}$ et si $E$ est de dimension finie, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les bases de $E$ sont constituées de $n$ vecteurs.

L'entier $n$ est appelé **dimension** de $E$, noté $\dim(E)$.

• Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$ (mais dans ce cas, $E$ n'admet aucune base).

Démonstration – Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ constituées respectivement de $p$ et $m$ vecteurs. La famille $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ engendre $E$, donc d'après le théorème précédent, $p \leqslant m$. En échangeant les roles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on obtient $m \leqslant p$ et finalement $p = m$. Toutes les bases de $E$ sont donc constituées du même nombre de vecteurs. □

Remarques

• Si $E$ est de dimension $n \geqslant 1$, il est engendré par une famille de $n$ vecteurs, donc toute famille de $n+1$ vecteurs de $E$ est liée.

• Si $E = \{0_E\}$, la convention $\dim(E) = 0$ assure que cette dernière propriété est encore valable.

• Ainsi, en dimension $n$, une famille libre est composée d'au plus $n$ vecteurs. De même, une famille génératrice est composée d'au moins $n$ vecteurs, car d'une telle famille, si $E \neq \{0_E\}$ (sinon le résultat est évident), on peut extraire une base de $E$, qui comporte $n$ vecteurs.

Exemple – Les espaces de référence sont-ils de dimension finie ? Si oui, donner leur dimension.

**Théorème – Caractérisation des bases**

On suppose $E$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de $n$ vecteurs de $E$.

Alors on a les équivalences :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } E.$$

Démonstration – Si $\mathcal{F}$ est libre, on peut la compléter en base de $E$, et cette base comporte $n$ vecteurs, qui est déjà le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$. Il n'y a donc pas eu de complétion à faire, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est une base de $E$. De même, si $\mathcal{F}$ est génératrice de $E$, on peut en extraire une base de $E$ (car $E \neq \{0_E\}$), mais il n'y a en fait pas d'extraction à faire, donc $\mathcal{F}$ est une base de $E$. Les implications réciproques sont évidentes. □

**Application** – Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

En effet, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ est à degrés échelonnés et tous ses éléments sont non nuls (le degré du polynôme nul est $-\infty$), donc elle est libre. De plus, elle comporte $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ éléments, donc d'après le théorème ci-dessus, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Théorème**

On suppose $E$ de dimension finie $n$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors :

• $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

• Si $\dim(F) = n$, alors $E = F$.

Démonstration – On commence par remarquer que pour les deux points, si $F = \{0_E\}$, le résultat est évident. On suppose donc dans la suite que $F \neq \{0_E\}$.

• Si $F$ était de dimension infinie, on pourrait construire, par une procédure proche de la démonstration du théorème de la base incomplète, une famille libre constituée d'un nombre arbitrairement grand d'éléments de $F$, et en particulier une famille libre de $n+1$ vecteurs de $E$, ce qui est impossible car $E$ est de dimension $n$ ; $F$ est donc de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F$. C'est une famille libre d'éléments de $E$, on a donc $p \leqslant n$, c'est-à-dire $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

• De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$ (*i.e.* $p = n$), alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de $n$ vecteurs de $E$, c'en est donc une base ; on en déduit que $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = F$. □

Attention ! Il est essentiel que $F$ soit un sous-espace vectoriel de $E$ pour appliquer ce théorème. Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ de même dimension, on ne peut évidemment pas affirmer que $F = G$.

**Définition – Base adaptée**

On suppose $E$ dimension finie. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
Une base de $E$ est dite **adaptée** à $F$ si on peut en extraire une base de $F$.

**Définition – Rang**

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de $E$, espace de dimension finie ou non.
On appelle **rang** de cette famille, noté $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.

Remarque – La famille finie $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$, qui est donc de dimension finie inférieure ou égale à $p$. On en déduit que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$ est bien défini, et inférieur ou égal à $p$.

**Propriété – Caractérisation des familles libres, génératrices par le rang**

• Si $E$ est de dimension finie $n$, une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de $E$ est génératrice de $E$ si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n$.

• Une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de $E$ (de dimension finie ou non) est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p$.

• Si $E$ est de dimension finie $n$, une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de $E$ est une base de $E$ si et seulement si $p = n$ et $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n$.

Démonstration

• La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de $E$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) = E$, ce qui équivaut d'après le théorème précédent à $\dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)) = \dim(E)$, *i.e.*, à l'égalité $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = n$.

• Pour le second point :

$\boxed{\Rightarrow}$ La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ engendre $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ donc, si elle est libre, c'est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ et on a

$$\dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)) = p, \quad \textit{i.e.} \quad \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ engendre $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ ; si de plus $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = p$, alors le nombre de vecteurs de cette famille est $\dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p))$, c'est donc une famille libre d'après le théorème de caractérisation des bases.

• Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$, on a $p = n$, et d'après le premier point, $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n$. Si $p = n$ et $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n$, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de $E$ d'après les deux premiers points. □

## 3. Produit de sous-espaces vectoriels

**Définition – Produit cartésien**

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit cartésien

$$\prod_{i=1}^{p} E_i = E_1 \times \cdots \times E_p$$

est l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_p);\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Si $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ sont deux éléments de $E_1 \times \cdots \times E_p$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$\begin{aligned}&(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p),\\ &\lambda(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

(toutes les additions et multiplications par un scalaire sont notées avec le même symbole, mais à droite du signe d'égalité, ce sont celles de chaque espace vectoriel $E_i$).

Attention ! Dans un produit cartésien, l'ordre des termes est important. La notation $\prod_{i=1}^{p} E_i$ doit être comprise en gardant cela à l'esprit. Par exemple, le produit $E_1 \times E_2$ n'est *pas* le produit $E_2 \times E_1$.

**Propriété – Produit de sous-espaces vectoriels**

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration – C'est une vérification immédiate, en utilisant le fait que chaque $E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le vecteur nul de $E_1 \times \cdots \times E_p$ étant $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$, et l'opposé d'un vecteur $(x_1, \dots, x_p)$ étant $(-x_1, \dots, -x_p)$. $\square$

Exemples

• Le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des éléments de la forme $(x,(y,z))$ où $x$, $y$ et $z$ sont des réels. Il peut être identifié (mais n'est pas *égal*) à $\mathbb{R}^3$.

• Le produit cartésien $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des éléments de la forme $(A,P)$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, par définition,

$$\lambda(A,P) + (B,Q) = (\lambda A + B, \lambda P + Q).$$

On voit bien sur cet exemple que les opérations, bien que notées avec le même symbole, ne sont pas les mêmes opérations (elles ne portent pas sur le même espace vectoriel).

**Propriété**

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i.$$

Démonstration – Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on note $n_i = \dim(E_i)$, et l'on choisit une base $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i})$ de $E_i$. Alors on vérifie facilement que la famille

$$\begin{aligned}&((e_{1,1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}), \dots, (e_{1,n_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p}), (0_{E_1}, e_{2,1}, \dots, 0_{E_p}), \dots, (0_{E_1}, e_{2,n_2}, \dots, 0_{E_p}), \dots\\ &\qquad \dots (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,1}), \dots, (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{p-1}}, e_{p,n_p}))\end{aligned}$$

d'éléments de $E_1 \times \cdots \times E_p$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$. En particulier, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i).$$

Les détails de cette démonstration sont très semblables à ceux d'une démonstration donnée ci-dessous pour les sommes directes (voir le théorème sur les bases adaptées à une somme directe).
$\square$

# II. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

## 1. Définitions et caractérisations

**Définition – Somme de sous-espaces vectoriels**

Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. La somme

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = E_1 + \cdots + E_p$$

est l'ensemble des vecteurs $x$ de $E$ de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i = x_1 + \cdots + x_p \quad \text{où, pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in E_i.$$

Remarque – On vérifie facilement que l'opération de sommation de sous-espaces vectoriels de $E$ est associative (il est inutile de parenthéser, même lorsque $p \geqslant 3$) et commutative (l'ordre des termes n'a pas d'importance, contrairement aux produits cartésiens), car l'addition de vecteurs de $E$ possède ces propriétés.

**Propriété**

Avec les notations précédentes, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Démonstration – On a bien sûr $E_1 + \cdots + E_p \subset E$ et $0_E \in E_1 + \cdots + E_p$ (car $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$). Soient $x = x_1 + \cdots + x_p$ et $y = y_1 + \cdots + y_p$ deux éléments de $E_1 + \cdots + E_p$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda x + y = \lambda(x_1 + \cdots + x_p) + (y_1 + \cdots + y_p) = (\lambda x_1 + y_1) + \cdots + (\lambda x_p + y_p) \in E_1 + \cdots + E_p$$

car chaque $E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Ainsi $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de $E$. $\square$

Exemple – On a $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(1,0) + \mathrm{Vect}(1,1) + \mathrm{Vect}(0,1)$.

**Définition – Somme directe**

On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est **directe** si : pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, on a l'implication

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ x_i = 0_E.$$

Dans ce cas la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ se note $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

**Propriété**

Soit $(E_1,\dots,E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si tout élément $x$ de $\sum_{i=1}^{p} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si la somme est directe, considérons $x = \sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i$ deux décompositions de $x$ avec $x_i \in E_i$ et $y_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i) = 0_E$$

avec $x_i - y_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ car $E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Par définition d'une somme directe, on a donc $x_i = y_i$ pour tout $i$, d'où l'unicité de la décomposition.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E$. En remarquant que $\sum_{i=1}^{p} 0_E = 0_E$ et que $0_E \in E_i$ pour tout $i$, on obtient deux décompositions de $0_E$. Par unicité, on a donc $x_i = 0_E$ pour tout $i$, et la somme est directe. $\square$

Exemple – La somme $\mathrm{Vect}(1,0) + \mathrm{Vect}(1,1) + \mathrm{Vect}(0,1)$ n'est pas directe car $(1,1) = (1,0) + (0,1)$.

**Propriété – Cas de deux sous-espaces vectoriels**

Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. La somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si la somme est directe, considérons $x \in E_1 \cap E_2$. Alors $x + (-x) = 0_E$ avec $x \in E_1$ et $-x \in E_2$. Par définition, on en déduit que $x = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0_E$. Alors $x_1 = -x_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, donc $x_1 = x_2 = 0_E$. La somme $E_1 + E_2$ est donc directe. $\square$

Attention ! Cette propriété ne se généralise pas à une somme de plus de deux sous-espaces comme le montre l'exemple de $\mathrm{Vect}(1,0) + \mathrm{Vect}(1,1) + \mathrm{Vect}(0,1)$, qui n'est pas directe alors que l'intersection de deux quelconques des sous-espaces parmi les trois est toujours réduite à $\{(0,0)\}$.

**Définition – Sous-espaces supplémentaires**

Soient $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que $F$ et $G$ sont **supplémentaires** (dans $E$) si $F \oplus G = E$ c'est-à-dire si la somme de $F$ et de $G$ est directe et égale à $E$.

Exemples

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(1,0) \oplus \mathrm{Vect}(1,1)$, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,2),(1,1,-1)) \oplus \mathrm{Vect}(1,2,3)$.
- Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. Alors $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]P \oplus \mathbb{K}_n[X]$.

En effet, un multiple de $P$ ne peut être de degré inférieur ou égal à $n$ que s'il est nul. La somme est donc directe. De plus, pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $A = PQ + R$, d'après le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Donc $A \in \mathbb{K}[X]P + \mathbb{K}_n[X]$, et ce pour tout $A$. La somme est donc égale à $\mathbb{K}[X]$.

## 2. Sommes directes, bases et dimensions

**Propriété – Sommes directes et familles libres**

• Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille libre d'éléments de $E$ ($p \geqslant 2$). Pour tout $i \in [\![1,\, p-1]\!]$, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i)$ et $\mathrm{Vect}(x_{i+1},\dots,x_p)$ sont en somme directe et

$$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i) \oplus \mathrm{Vect}(x_{i+1},\dots,x_p).$$

• Si $(E_1,\dots,E_p)$ est une famille de sous-espaces vectoriels de $E$ dont la somme est directe et si $(x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ est une famille de vecteurs tous non nuls, alors cette famille est libre.

Démonstration

• Soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i = \lambda_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \lambda_p x_p \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i) \cap \mathrm{Vect}(x_{i+1},\dots,x_p)$. Alors

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i - \lambda_{i+1}x_{i+1} + \cdots - \lambda_p x_p = 0_E.$$

La famille $(x_1,\dots,x_p)$ étant libre, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i$, et donc $x = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i) \cap \mathrm{Vect}(x_{i+1},\dots,x_p) = \{0_E\}$, donc la somme de ces deux sous-espaces est directe. Il est de plus immédiat que $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i) + \mathrm{Vect}(x_{i+1},\dots,x_p)$.

• Si une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$ est nulle, alors, sachant que $\lambda_i x_i \in E_i$ pour tout $i$, l'aspect direct de la somme des $E_i$ entraîne que $\lambda_i x_i = 0_E$ pour tout $i$, avec $x_i \neq 0_E$, et donc $\lambda_i = 0$, d'où le résultat. □

**Notation** – Si $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_p$ sont des familles d'éléments de $E$, on appellera juxtaposition (ou concaténation) de ces familles la famille $\mathcal{F}$ obtenue en plaçant dans une même famille tous les vecteurs de $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_p$, en gardant les répétitions éventuelles et en respectant l'ordre d'apparition des termes. On pourra représenter ceci par la notation $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_p$, mais cette notation n'est pas universelle.

Par exemple, $(e_1,e_2) \sqcup (f_1,f_2,f_3) = (e_1,e_2,f_1,f_2,f_3)$. □

En appliquant plusieurs fois le premier point de la propriété précédente, on obtient immédiatement :

**Corollaire – Fractionnement d'une base**

On suppose que $E$ est de dimension finie $n \geqslant 2$ ; soit $\mathcal{B} = \mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_p$ une base de $E$. Alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_i).$$

**Propriété**

Si $E$ est de dimension finie et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ possède des supplémentaires.

Démonstration – Si $F = \{0_E\}$, le résultat est évident : $E$ est un supplémentaire de $F$. De même, si $F = E$, $\{0_E\}$ est un supplémentaire de $F$. Sinon, soit $\mathcal{F}$ une base de $F$. En complétant $\mathcal{F}$ en base de $E$, et en appliquant le corollaire précédent avec $p = 2$, on obtient un supplémentaire de $F$ (et la base de $E$ ainsi construite est adaptée à $F$). □

Inversement, on peut construire des bases de $E$ à partir d'une décomposition de $E$ en somme directe :

**Propriété/Définition – Base adaptée à une somme directe**

Soit $(E_1,\dots,E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$, tous de dimension finie non nulle, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Pour tout $i$, on se donne une base $\mathcal{B}_i$ de $E_i$.

Alors la juxtaposition $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_p$ de ces bases est une base de $E$ (qui en particulier est de dimension finie).

On appelle base de $E$ **adaptée** à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ une base de $E$ de la forme de $\mathcal{B}$.

Démonstration – Pour tout $i$, on note $n_i = \dim(E_i)$, $\mathcal{B}_i = (e_{i,1},\dots,e_{i,n_i})$ et on pose $n = \sum_{i=1}^p n_i$.

• **Caractère générateur :** tout d'abord, chaque vecteur $e_{k,j}$ appartient à $E_k$ et donc à la somme des $E_i$. Soit $x \in E$. Il existe $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$. De plus pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, il existe $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i} \in \mathbb{K}^{n_i}$ tel que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}.$$

Alors

$$x = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \right) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}).$$

Ceci étant valable pour tout $x$ appartenant à $E$, on en déduit que $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

• **Liberté :** soit $(\lambda_{i,j}) \in \mathbb{K}^n$ un $n$-uplet de scalaires (avec $1 \leq i \leq p$ et pour tout $i$, $1 \leq j \leq n_i$) tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \right) = 0_E.$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur $v_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}$ appartient à $E_i$, et la somme des $E_i$ étant directe, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0_E$ entraîne que $v_i = 0_E$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Mais alors, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E,$$

or $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_i$ donc est une famille libre. On en déduit que $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout $j \in [\![1,n_i]\!]$. Finalement, pour tout $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n_i$, on a $\lambda_{i,j} = 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre. $\square$

**Propriété – Dimension d'une somme**

Soit $(E_1,\dots,E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$. Alors :

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$,

• Il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe.

• Si $E$ est de dimension finie et si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, alors pour que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, il faut et il suffit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) = \dim(E)$.

Démonstration – Tout d'abord, on se ramène facilement au cas où les $E_i$ sont de dimension non nulle, ce que l'on suppose dans la suite de la démonstration.

• Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_i$, et $n_i = \dim(E_i)$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient que la juxtaposition $\mathcal{F}$ de ces bases est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p E_i$. On a donc

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^p n_i = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

• Si la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe, la famille $\mathcal{F}$ est une *base* de $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ (d'après la démonstration précédente), donc l'inégalité précédente est une égalité.

Réciproquement, si l'inégalité précédente est une égalité, alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p E_i$ de $\dim(\sum_{i=1}^p E_i)$ vecteurs, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\sum_{i=1}^p E_i$. D'après la propriété de fractionnement d'une base, on en déduit que $\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, donc la somme est directe.

• Dans ce cas, pour que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, il faut et il suffit que $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^p E_i\right) = \dim(E)$, c'est-à-dire, d'après le deuxième point, que $\sum_{i=1}^p \dim(E_i) = \dim(E)$. $\square$

Exemple – La somme de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ n'est jamais directe, car la somme de leurs dimensions est 4.

**Corollaire**

On suppose $E$ de dimension finie. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
Pour que $E = F \oplus G$, il faut et il suffit que

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration – C'est un cas particulier de la propriété précédente dans le cas de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$, puisqu'alors, le fait que la somme $F + G$ soit directe équivaut au fait que $F \cap G = \{0_E\}$. $\square$

Remarque – En particulier, tous les supplémentaires de $F$ ont la même dimension.

Lorsque la somme de deux sous-espaces vectoriels de $E$ n'est pas directe, on a le résultat suivant :

**Théorème – Formule de Grassmann**

Si $E$ est de dimension finie et $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration – Soit $F'$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ et $G'$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $G$. Montrons que $F + G = F' \oplus G' \oplus (F \cap G)$. Tout d'abord, si $x' + y' + z = 0_E$ avec $x' \in F'$, $y' \in G'$ et $z \in F \cap G$, alors

$$x' = -y' - z \in F' \cap G \subset F' \cap (F \cap G) = \{0_E\}.$$

On en déduit que $y' = -z \in G' \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ et finalement $x' = y' = z = 0_E$. Donc la somme est directe. De plus, on constate que

$$F + G = [(F \cap G) + F'] + [(F \cap G) + G'] = F' + G' + (F \cap G).$$

Alors, d'après la propriété sur la dimension d'une somme,

$$\begin{aligned}
\dim(F + G) &= \dim(F') + \dim(G') + \dim(F \cap G) \\
&= \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G) - \dim(F \cap G) + \dim(F \cap G) \\
&= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple – Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) et $G$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, dont l'intersection est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a, d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Sachant que $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, on en déduit que $F + G = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut d'ailleurs prouver ce résultat directement en décomposant toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme de la somme d'une matrice symétrique $S$ et d'une matrice triangulaire supérieure $T$ : on choisit pour $S$ la matrice de diagonale nulle dont la partie « strictement inférieure » est la même que celle de $A$, et dont la partie « strictement supérieure » est obtenue par symétrie de la partie strictement inférieure. On pose alors $T = A - S$ ; $T$ est triangulaire supérieure car $A$ et $S$ ont la même partie triangulaire strictement inférieure. On a donc la décomposition souhaitée. Cette décomposition n'est pas unique car la somme $F + G$ n'est pas directe ($F \cap G \neq \{0_E\}$), l'absence d'unicité provient en fait, lorsque l'on effectue la décomposition, d'un choix des diagonales qui n'est pas unique : on peut choisir pour $S$, au lieu d'une diagonale nulle, une diagonale quelconque.

# III. Applications linéaires

Dans toute la suite, $E$ et $F$ désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

## 1. Définition et exemples

**Définition – Application linéaire**

On appelle **application linéaire** de $E$ dans $F$ toute application $u$ de $E$ dans $F$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall\,(x,y) \in E^2\ ,\ u(x+y) = u(x) + u(y),$
- $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \forall\,x \in E\ ,\ u(\lambda x) = \lambda u(x).$

L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Si $u$ est une application linéaire de $E$ dans $E$, on dit que $u$ est un **endomorphisme** de $E$. L'ensemble des endomorphismes de $E$ est noté $\mathscr{L}(E)$.

Remarque – Si $u$ est linéaire, on a nécessairement $u(0_E) = 0_F$. En effet,

$$u(0_E) = u(0_E + 0_E) = u(0_E) + u(0_E),$$

d'où le résultat par soustraction de $u(0_E)$. En particulier, si $u(0_E) \neq 0_F$, alors $u$ n'est pas linéaire.

Par exemple, $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y,1) \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

**Propriété**

L'application $u$ de $E$ dans $F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Exemples

• L'**application nulle** de $E$ dans $F$, $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$ est une application linéaire. On la notera $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ ou $0_{\mathscr{L}(E)}$ si $E = F$.

• L'**application identité** de $E$ dans $E$, $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est une application linéaire.

• Plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application de $E$ dans $E$, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ est une application linéaire. Elle est appelée **homothétie** de rapport $\lambda$.

• L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z,x-y+z) \end{array} \right.$ est linéaire.

• L'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$ est linéaire.

**Définition – Application linéaire canoniquement associée à une matrice**

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit une application $u_M$ par

$$u_M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

L'application $u_M$ est linéaire , elle est appelée **application linéaire canoniquement associée à la matrice** $M$.

## 2. Opérations sur les applications linéaires

**Définition**

Soient $u$ et $v$ deux éléments de $\mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Sachant que $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit des applications $u+v$ et $\lambda \cdot u$ (ou simplement $\lambda u$) en posant, pour tout $x \in E$,

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \quad \text{et} \quad (\lambda u)(x) = \lambda \cdot u(x).$$

**Propriété**

L'espace $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier,

$$\forall\, (u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u+v \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } \lambda u \in \mathscr{L}(E,F).$$

**Propriété – Composition d'applications linéaires**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

La démonstration de ces deux propriétés est laissée en exercice. □

### ► Cas particuliers des endomorphismes

Les deux propriétés ci-dessus montrent que $\mathscr{L}(E)$ est un ensemble dont les éléments peuvent être additionnés, multipliés par un scalaire, et composés. En général, la loi de composition n'est pas commutative : il existe des endomorphismes $u$ et $v$ de $E$ tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

**Définition**

Soit $u$ un endomorphisme de $E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $u^k$ l'endomorphisme obtenu en effectuant la composition $u \circ \cdots \circ u$ ($k$ fois). Par convention, $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

**Propriété – Formule du binôme de Newton**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ **qui commutent** (c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$). Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v^k.$$

Démonstration – Il suffit de démontrer la première des deux formules, l'autre en étant une réécriture obtenue par changement d'indice. On remarque tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k$ et $v$ commutent (cela se prouve par récurrence immédiate sur $k$). On prouve alors la formule par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, le résultat est évident car $(u+v)^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention, et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k \circ v^{0-k} = u^0 \circ v^0 = \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E.$$

Supposons le résultat vrai au rang $n$. Alors

$$(u+v)^{n+1} = (u+v) \circ (u+n)^n = (u+v) \circ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

par hypothèse de récurrence. Par linéarité de $u$ et $v$ et le fait que $v$ commute avec toutes les puissances de $u$, on a donc

$$(u+v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1} \circ v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k+1}.$$

Par le changement d'indice $m = k+1$ dans la première somme, on obtient

$$(u+v)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} u^m \circ v^{n-m+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k+1}.$$

En regroupant les termes communs dans ces deux sommes (on rappelle que $k$ et $m$ sont des indices muets), on a

$$\begin{aligned}(u+v)^{n+1} &= u^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k \circ v^{n-k+1} + v^{n+1} \\ &= u^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k \circ v^{n+1-k} + v^{n+1}\end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal. On remarque alors que les termes $u^{n+1}$ et $v^{n+1}$ correspondent au terme général de la somme, pour $k = n+1$ et $k = 0$ respectivement. On a donc la formule au rang $n+1$ et finalement pour tout $n$ par principe de récurrence. □

Remarque – On utilise souvent cette formule dans le cas où l'un des deux endomorphismes est l'identité, ou une homothétie, qui commute avec tous les endomorphismes.

### ▶ Polynômes d'endomorphismes

**Définition – Polynômes d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On peut alors définir $P(u)$, nouvel élément de $\mathscr{L}(E)$ par

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \operatorname{Id}_E .$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme de $u$. L'ensemble des polynômes de $u$ est noté $\mathbb{K}[u]$.

Attention ! Ne pas se tromper dans le terme $a_0 \operatorname{Id}_E$ correspondant au terme constant de $P$ ! Par exemple, lorsque $P(X) = X^2 + 2X + 3$, on a $P(u) = u^2 + 2u + 3 \operatorname{Id}_E$, c'est-à-dire, pour tout $x \in E$,

$$P(u)(x) = u^2(x) + 2u(x) + 3x.$$

**Propriété**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $1(u) = \operatorname{Id}_E$
- $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$.
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. En particulier, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

**Définition**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **annulateur** de $u$ (ou que que $u$ annule $P$) si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

## 3. Applications linéaires et sommes directes

**Théorème**

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$ telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, soit $u_i$ une application linéaire de $E_i$ dans $F$.
Alors il existe une unique application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ dont la restriction à $E_i$ soit $u_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Démonstration

**Analyse :** si $u$ vérifie les conditions ci-dessus et si $x = x_1 + \cdots + x_p \in E$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i$, on a nécessairement

$$u(x) = u(x_1 + \cdots + x_p) = u(x_1) + \cdots + u(x_p) = u_1(x_1) + \cdots + u_p(x_p).$$

L'application $u$ est donc entièrement déterminée, et ceci prouve en particulier son unicité.

**Synthèse :** pour tout $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i$, on pose

$$u(x) = u_1(x_1) + \cdots + u_p(x_p).$$

L'application $u$ est bien définie car la décomposition de $x$ existe et est unique, la somme étant directe et égale à $E$. Elle est linéaire : si $x = x_1 + \cdots + x_p$ et $y = y_1 + \cdots + y_p$ sont deux éléments de $E$ décomposés sur la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i),$$

avec $\lambda x_i + y_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, donc par définition,

$$u(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(\lambda x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda u_i(x_i) + u_i(y_i))$$

par linéarité des $u_i$. Finalement

$$u(\lambda x + y) = \lambda \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i) + \sum_{i=1}^{p} u_i(y_i) = \lambda u(x) + u(y).$$

Enfin, $u$ coïncide avec $u_i$ sur $E_i$, car pour tout $x \in E_i$, $u(x) = u_i(x)$, les autres composantes de $x$ dans la décomposition étant nulles. Ceci prouve l'existence de $u$. □

**Corollaire**

On suppose $E$ de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de $F$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration – On a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$ ; il suffit d'appliquer le résultat précédent avec, pour tout $i$,

$$u_i : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Vect}(e_i) & \to & F \\ \lambda\, e_i & \mapsto & \lambda\, f_i \end{array} \right.$$ □

## 4. Image et noyau d'une application linéaire

### ▶ Image et surjectivité

**Propriété**

L'image par une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ d'un sous-espace vectoriel de $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

Démonstration – Soit $G$ un sous-espace vectoriel de $E$. Tout d'abord, on a évidemment $u(G) \subset F$. De plus, $0_F \in u(G)$ car $0_F = u(0_E)$ et $0_E \in E$. Enfin, soient $u(x)$ et $u(y)$ deux éléments de $u(G)$ avec $x \in G$ et $y \in G$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, par linéarité de $u$, $\lambda u(x) + u(y) = u(\lambda x + y)$. Or $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $x$ et $y$ sont deux éléments de $G$, donc $\lambda x + y \in G$, et ainsi $u(\lambda x + y) \in u(G)$. On a donc montré que $u(G)$ est stable par combinaison linéaire, d'où le résultat. □

**Propriété/Définition – Image d'une application linéaire**

L'**image** de $u$, notée $\mathrm{Im}(u)$, est l'image de $E$ par $u$, *i.e.* l'ensemble des images des éléments de $E$ par $u$ :

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{y \in F;\ \exists\, x \in E,\ u(x) = y\}.$$

L'ensemble $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ d'après la propriété précédente.

**Propriété – Détermination de $\mathrm{Im}(u)$**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille génératrice de $E$ (par exemple, une base). Alors $\mathrm{Im}(u)$ est le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par les vecteurs $u(e_1),\dots,u(e_n)$ :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_n)\right).$$

Démonstration – Si $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ avec $x \in E$, on peut décomposer $x$ sur la famille génératrice $(e_1,\dots,e_n)$ de $E$ : il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Par linéarité de $u$, on a donc

$$y = u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) \in \mathrm{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_n)\right).$$

Ainsi $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_n)\right)$. Réciproquement, $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ auquel appartiennent $u(e_1),\dots,u(e_n)$, donc

$$\mathrm{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_n)\right) \subset \mathrm{Im}(u).$$

On a donc l'égalité souhaitée. $\square$

Remarque – Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ ; $u$ est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

Exemple – Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$

L'application linéaire $\phi$ est surjective, car toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ possède des primitives, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

▶ **Noyau et injectivité**

**Propriété/Définition – Noyau d'une application linéaire**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Le **noyau** de $u$ est l'ensemble des vecteurs de $E$ qui ont pour image le vecteur nul de $F$. On le note $\mathrm{Ker}(u)$. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E;\ u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\}).$$

$\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Démonstration – Tout d'abord, $\mathrm{Ker}(u) \subset E$ par définition. De plus, $0_E \in \mathrm{Ker}(u)$ car $u(0_E) = 0_F$. Enfin, soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors par linéarité de $u$,

$$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F,$$

et donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(u)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $E$. $\square$

Exemple – Soit $u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y, x+2z, x-y+z) \end{array} \right.$

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(u)$, on résout l'équation $u(x,y,z) = 0$, ce qui nous conduit à la résolution du système :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & -2y & & = 0 \\ x & & +2z & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \end{array} \right. \quad \text{qui équivaut à} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2z \\ y & = -z \end{array} \right.$$

D'où $\mathrm{Ker}(u) = \{(-2z,-z,z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(-2,-1,1)$.

**Propriété**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour que $u$ soit injective, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0_F = u(0_E)$, donc par injectivité de $u$, $x = 0_E$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$ tels que $u(x) = u(y)$. Par linéarité de $u$, on a $u(x-y) = 0_F$, et donc $x - y \in \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Ainsi $x = y$, ce qui prouve que $u$ est injective. □

Exemple – Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$

L'application linéaire $\phi$ n'est pas injective, car toute fonction constante appartient à son noyau (et il existe des fonctions constantes non nulles). En fait, $\mathrm{Ker}(\phi)$ est *égal* à l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

### ▶ Équations linéaires

**Définition**

Une **équation linéaire** est une équation de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$, d'inconnue $x \in E$.

Bien sûr, l'équation $u(x) = b$ possède des solutions si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$. Si l'équation est sans second membre, c'est-à-dire si $b = 0$, alors elle s'écrit $u(x) = 0$, équation dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(u)$. En particulier, l'ensemble des solutions d'une équation linéaire sans second membre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dans le cas général ($b$ quelconque), on peut décrire la forme de l'ensemble des solutions :

**Propriété – Structure de l'ensemble des solutions**

Avec les notations précédentes, si $x_0 \in E$ est une solution particulière de $u(x) = b$, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \{x_0 + y;\ y \in \mathrm{Ker}(u)\}.$$

Démonstration – On a $u(x_0) = b$ et donc pour $x \in E$, on a les équivalences :

$$u(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = u(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad u(x - x_0) = 0_F \quad \Leftrightarrow \quad x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u),$$

d'où le résultat. □

Exemples

- On considère le système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_p$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne de coefficients $b_1, \ldots, b_n$, ce système se met sous la forme matricielle $(E) : AX = B$, c'est-à-dire que $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de $(S)$ si et seulement si $X$ est solution de $(E)$. Le système $(S)$ et l'équation $(E)$ sont des équations linéaires. Dans le cas de l'équation $(E) : AX = B$, on a $u = u_A$, application linéaire canoniquement associée à $A$.

On dit que $A$ est **la matrice du système linéaire** $(S)$. On reviendra en détails sur l'étude des systèmes linéaires dans le chapitre suivant.

• Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 (avec ou sans second membre) sont des équations linéaires : l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ (où $a$ et $b$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$) peut s'écrire $u(y) = b$ où

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y' + ay \end{array} \right.$$

De même, l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ (où $a$ et $b$ sont deux scalaires et $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$) peut s'écrire $u(y) = f$ où

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^2(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y'' + ay' + by \end{array} \right.$$

## 5. Projecteurs et symétries

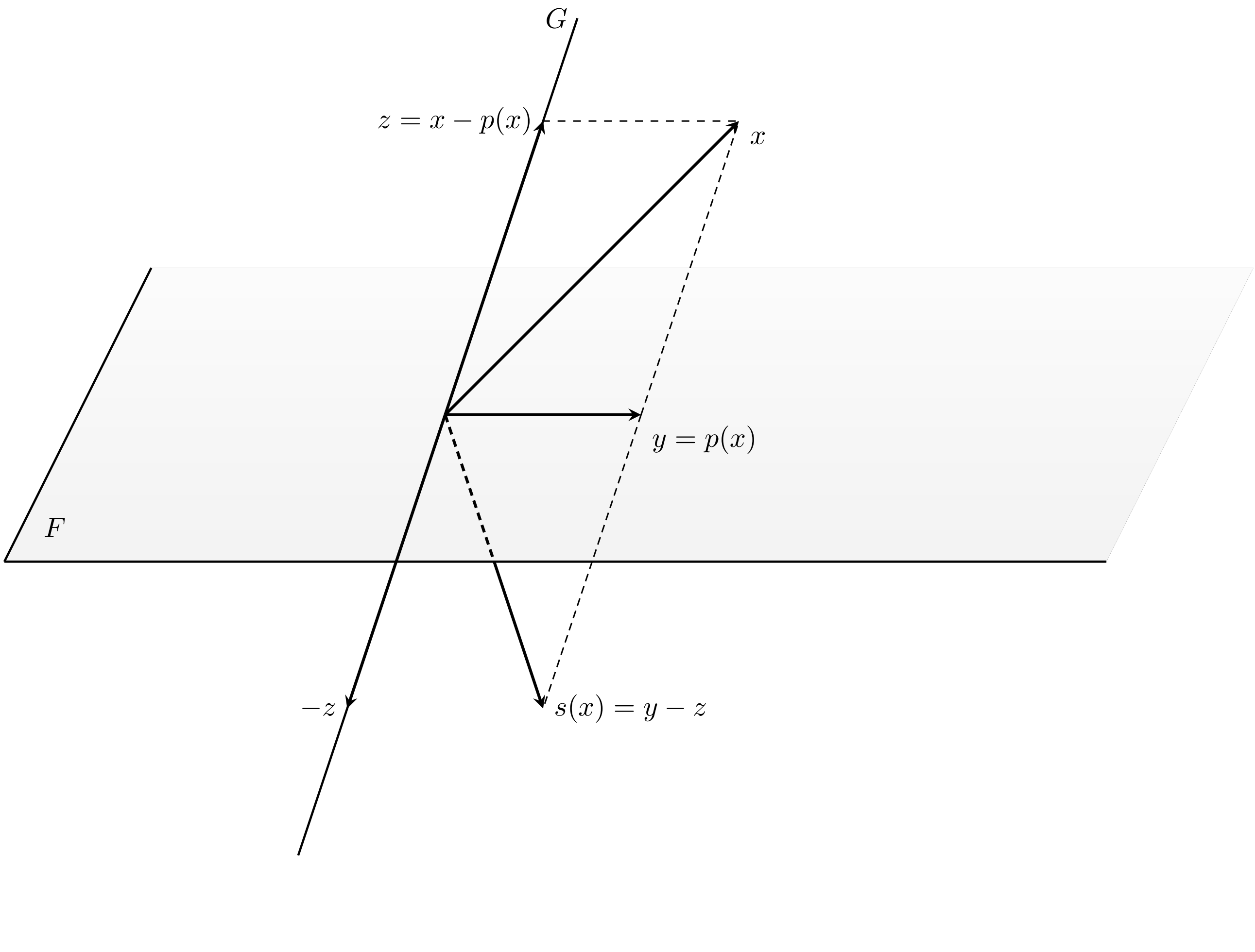
**Propriété/Définition – Projecteur, symétrie**

• Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $p$ est un **projecteur** s'il existe deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ tels que $E = F \oplus G$ et, pour tout $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on ait $p(x) = y$.

Dans ce cas, on a $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. On dit que $p$ est le projecteur (ou la projection) sur $F$ parallèlement à $G$.

• Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $s$ est une **symétrie** s'il existe deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ tels que $E = F \oplus G$ et, pour tout $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on ait $s(x) = y - z$.

Dans ce cas, on a $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. On dit que $p$ est la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.



Démonstration des égalités sur les images et noyaux

• Si $p$ est la projection sur $F$ parallèlement à $G$, alors pour tout $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$, $p(x) = y$. Or $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ si et seulement si $p(x) = x$, ce qui équivaut au fait que $y = y + z$, et donc que $z$ soit nul, c'est-à-dire que $x \in F$. Donc $F = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$.

De même, $x \in \operatorname{Ker}(p)$ si et seulement si $p(x) = 0$, ce qui équivaut au fait que $y$ soit nul, et donc au fait que $x \in G$. Donc $G = \operatorname{Ker}(p)$.

Enfin, par définition, $\operatorname{Im}(p) \subset F$, et si $y \in F$, $p(y) = y$ (la décomposition de $y$ sur la somme directe $E = F \oplus G$ est $y = y + 0_E$) , d'où : $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$, alors $x = p(x) \in \operatorname{Im}(p)$. On a donc $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$.

• On procède de façon analogue pour les symétries. □

Remarque – Avec les notations précédentes, on a $\operatorname{Id}_E + s = 2p$.

**Propriété**

• Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Pour que $p$ soit un projecteur, il faut et il suffit que $p^2 = p$.

• Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Pour que $s$ soit une symétrie, il faut et il suffit que $s^2 = \operatorname{Id}_E$ .

Démonstration – D'après ce qui précède, si $p$ est un projecteur, alors $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. On en déduit que $(p - \operatorname{Id}_E) \circ p = 0$, et donc $p^2 = p$. Réciproquement, si $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, montrons que $E = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ : tout d'abord, l'intersection de ces deux sous-espaces vectoriels de $E$ est réduite au vecteur nul, car si $p(x) = x$ et $p(x) = 0_E$, alors $x = 0_E$. De plus, pour tout $x \in E$,

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

avec $p(x) \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$ car $p^2 = p$.

On a donc bien $E = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p)$. Il s'ensuit que $p$ est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$, car si $x = y + z \in E$ avec $y \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $z \in \operatorname{Ker}(p)$, on a $p(x) = p(y) = y$.

On a donc l'équivalence souhaitée. Pour les symétries on procède de la même façon en remplaçant $\operatorname{Ker}(p)$ par $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. □

Remarque – Cette propriété se reformule ainsi : $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ est annulateur de $p$ ; $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $X^2 - 1$ est annulateur de $s$.

# IV. Isomorphismes et automorphismes

## 1. Définitions et premières propriétés

**Définition – Isomorphismes, espaces isomorphes**

• Soit $u$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $u$ est un **isomorphisme** de $E$ sur $F$ si $u$ est linéaire et bijective de $E$ sur $F$.

• On dit que $E$ et $F$ sont des **espaces isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $E$ sur $F$.

Exemple – Les espaces $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

**Propriété**

Si $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$, alors $u^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ sur $E$.

Démonstration – Il suffit de montrer que $u^{-1}$ est linéaire. Soit $(x,y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$u^{-1}(\lambda x + y) = u^{-1}(\lambda(u \circ u^{-1})(x) + (u \circ u^{-1})(y)) = u^{-1}(u(\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y))$$

par linéarité de $u$. En simplifiant $u^{-1} \circ u$, on obtient

$$u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y). \qquad \square$$

**Propriété**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour que $u$ soit un isomorphisme de $E$ sur $F$, il faut et il suffit qu'il existe une application $v \in \mathscr{L}(F,E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas, $u^{-1} = v$.

Démonstration – Bien sûr, il suffit de montrer l'implication réciproque. Si un tel $v$ existe, $u$ est injective car, si $x \in E$ vérifie $u(x) = 0_F$, alors $v(u(x)) = 0_E$ et donc $x = 0_E$. De plus, $u$ est surjective, car pour tout $y \in F$, $y = u(v(y))$ est l'image par $u$ du vecteur $v(y) \in E$. Finalement $u$ est un isomorphisme et la relation $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ entraîne que $u^{-1} = v$. $\square$

Méthode – Pour prouver que $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$, on peut donc :

- Montrer que $u$ est linéaire, injective et surjective.
- Montrer que $u$ est linéaire et déterminer $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Cette dernière méthode est très utile lorsque l'on a l'intuition de l'expression de $u^{-1}$.

Exemples

• Soient

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ Q(X) & \mapsto & Q(X-2) \end{array} \right.$$

Alors $u$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, de bijection réciproque $v$.

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ ($d \geqslant 1$) tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, c'est-à-dire

$$0_{\mathscr{L}(E)} = a_d u^d + \cdots + a_0 \,\mathrm{Id}_E\,.$$

Si le coefficient constant $a_0$ de $P$ est différent de 0, alors on peut écrire

$$-\frac{a_d}{a_0} u^d - \cdots - \frac{a_1}{a_0} u = \mathrm{Id}_E,$$

et donc

$$u \circ \left( -\frac{a_d}{a_0} u^{d-1} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \mathrm{Id}_E \right) = \left( -\frac{a_d}{a_0} u^{d-1} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \mathrm{Id}_E \right) \circ u = \mathrm{Id}_E\,.$$

Ainsi, $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $E$, de bijection réciproque

$$-\frac{a_d}{a_0} u^{d-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0} \mathrm{Id}_E\,.$$

Cette expression de $u^{-1}$ est d'autant plus simple que $P$ est de bas degré. On voit donc que l'obtention de polynômes annulateurs de $u$ peut donner des informations importantes sur $u$. On développera largement ce thème dans le chapitre **Réduction des endomorphismes et des matrices carrées**.

Par exemple, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + 2u - \mathrm{Id} = 0$. Alors

$$u \circ (u^2 + 2\,\mathrm{Id}) = (u^2 + 2\,\mathrm{Id}) \circ u = \mathrm{Id}\,.$$

On sait donc que $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $E$ avec $u^{-1} = u^2 + 2\,\mathrm{Id}\,.$

**Définition – Automorphismes**

Si $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $E$ (c'est-à-dire si $u : E \to E$ est linéaire et bijective) on dit que $u$ est un **automorphisme** de $E$.

L'ensemble des automorphismes de $E$ est noté $\mathcal{G}\ell(E)$.

**Propriété/Définition**

L'ensemble $\mathcal{G}\ell(E)$, muni de l'opération de composition des applications, est appelé **groupe linéaire** de $E$. On a notamment :

- Si $u \in \mathcal{G}\ell(E)$, alors $u^{-1} \in \mathcal{G}\ell(E)$.
- Si $u \in \mathcal{G}\ell(E)$ et $v \in \mathcal{G}\ell(E)$ alors $u \circ v \in \mathcal{G}\ell(E)$. En fait, on a : $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$.

Si $u \in \mathcal{G}\ell(E)$, on dit également que $u$ est **inversible**, et $u^{-1}$ est appelé **inverse** de $u$.

Démonstration – Le premier point a été démontré plus haut. Quant au second, soient $u$ et $v$ deux éléments de $\mathcal{G}\ell(E)$, alors on sait déjà que $u \circ v$ est linéaire ; de plus,

$$(u \circ v) \circ (v^{-1} \circ u^{-1}) = u \circ (v \circ v^{-1}) \circ u^{-1} = u \circ \mathrm{Id}_E \circ u^{-1} = u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$$

et de même, $(v^{-1} \circ u^{-1}) \circ (u \circ v) = \mathrm{Id}_E$ . Ceci prouve que $u \circ v \in \mathcal{G}\ell(E)$ avec $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$.
□

## 2. Isomorphismes en dimension finie

### ▶ Caractérisation

**Théorème – Caractérisation des isomorphismes par les bases**

On suppose que $E$ est de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

L'application $u$ est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de $F$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $u$ est un isomorphisme, et montrons que $u(\mathcal{B})$ est une famille libre et génératrice de $F$.

**Liberté :** si $\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n) = 0_F$ pour des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors par linéarité de $u$,

$$u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0_F.$$

L'application $u$ étant injective, on a donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$. La famille $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i$.

**Aspect générateur :** soit $y \in F$ et $x \in E$ tel que $u(x) = y$ (un tel $x$ existe car $u$ est surjective). On peut alors écrire $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ pour des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, car $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E$. Finalement

$$y = u(x) = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n).$$

On a donc montré que $y \in \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$, et ce pour tout $y \in F$, d'où le résultat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de $F$, montrons que $u$ est bijective.

**Injectivité :** soit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$ tel que $u(x) = 0_F$. Alors

$$0_F = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n).$$

La famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ étant libre, on a $\lambda_i = 0$ pour tout $i$, et donc $x = 0_E$ : $u$ est injective.

**Surjectivité :** $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ engendre $F$, donc pour tout $y \in F$, il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $y = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n)$, et ainsi

$$y = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$$

avec $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$. Finalement, $y \in \mathrm{Im}(u)$, pour tout $y \in F$ : $u$ est surjective. □

Remarque – Pour le sens direct, on a en fait montré les résultats suivants :

• Si $u$ est injective, alors l'image par $u$ d'une famille libre d'éléments de $E$ est une famille libre d'éléments de $F$.

• Si $E$ est de dimension finie, et si $u$ est surjective, alors l'image par $u$ d'une famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de $F$.

**Théorème – Caractérisation des isomorphismes en dimension finie**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de même dimension finie** $n$ et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On a les équivalences :

$$u \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ est bijective.}$$

Démonstration – Le résultat est évident si $n = 0$ (les trois propriétés sont vraies). Sinon, soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Si $u$ est injective, $u(\mathcal{B})$ est une famille libre d'éléments de $F$ de $n = \dim(F)$ vecteurs ; c'est donc une base de $F$. Donc $u$ est bijective d'après le théorème précédent. Si $u$ est surjective, $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $F$ de $n$ vecteurs ; c'est donc une base de $F$. Dans ce cas aussi, $u$ est bijective. Les implications réciproques sont évidentes. □

**Bilan** – Sous les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $u$ est bijective,
- $u$ est injective,
- $u$ est surjective,
- $u$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$,
- $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ ,
- $\mathrm{Im}(u) = F$,
- $u$ transforme toute base de $E$ en une base de $F$.

Attention ! L'hypothèse $\dim(E) = \dim(F)$ est cruciale. En effet :

- $f : x \mapsto (x,x)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, est injective mais non surjective.
- $g : (x,y) \mapsto x$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est surjective mais non injective.

De même, l'hypothèse de dimension *finie* est essentielle même si $E = F$, comme le montre l'exemple suivant : soit $\phi : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \ \phi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt.$$

Alors $\phi$ est un endomorphisme, $\phi$ est injective mais non surjective.

Autre contre-exemple : si $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ désigne l'opérateur de dérivation $P \mapsto P'$, alors $D$ est un endomorphisme, $D$ est surjective mais non injective.

### ▶ Espaces isomorphes

**Propriété**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ un isomorphisme. Alors $E$ est de dimension finie si et seulement si $F$ est de dimension finie, et dans ce cas $\dim(E) = \dim(F)$. On mentionne souvent ce résultat en disant : « les isomorphismes préservent la dimension ».

Démonstration – Supposons $E$ de dimension finie $n$. Si $n = 0$, le résultat est évident car alors $F = \{0_F\}$. Si $n \geqslant 1$, l'image d'une base de $E$ par $u$ est une base de $F$, qui par conséquent est de dimension finie. De plus, ces deux bases ont le même nombre de vecteurs, donc on a $\dim(E) = \dim(F)$. Si $F$ est de dimension finie, on raisonne de la même façon avec la bijection réciproque $u^{-1} : F \to E$. $\square$

**Propriété – Caractérisation des espaces isomorphes par la dimension**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $F$ est isomorphe à $E$ si et seulement si $F$ est de dimension finie avec $\dim(F) = n$.

Démonstration – Si $E$ et $F$ sont isomorphes, la propriété précédente montre que $F$ est de dimension finie $n$. Réciproquement, supposons que $F$ est de dimension finie $n$. Si $n = 0$, le résultat est évident, l'application nulle étant un isomorphisme de $E$ sur $F$. Si $n \geqslant 1$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$. L'unique application linéaire de $E$ dans $F$ vérifiant $u(e_i) = f_i$ pour tout $i$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$, car elle transforme une base de $E$ en une base de $F$. Les espaces $E$ et $F$ sont donc isomorphes. $\square$

Exemple – Si $\dim(E) = n \geqslant 1$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, alors l'application linéaire

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \to & F^n \\ u & \mapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme : en effet, pour toute famille $(f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de $F$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire, telle que $\phi(u) = (f_1, \dots, f_n)$. Ainsi, si $F$ est de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et de même dimension que $F^n$, *i.e.* de dimension $n \times \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

**Corollaire**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque – Dans ce cas, pour faire le lien avec la démonstration de la propriéte précédente, on choisit $F = \mathbb{K}^n$, $(f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $u : E \to \mathbb{K}^n$ l'application qui à tout vecteur de $E$ associe le $n$-uplet de ses coordonnées dans une base fixée $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$. L'application $u$ est parfois appelée isomorphisme des coordonnées.

Le corollaire précédent montre que $\mathbb{K}^n$ est le « modèle » du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.

# V. Rang et théorème du rang

## 1. Rang d'une application linéaire

**Définition – Rang d'une application linéaire**

Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on dit que $u$ est **de rang fini** et on appelle **rang** de $u$ la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, notée $\mathrm{rg}(u)$.

Remarques

• Si $F$ est de dimension finie, alors sachant que $\mathrm{Im}(u) \subset F$, on en déduit que $u$ est de rang fini avec

$$\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F).$$

On a égalité si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$, *i.e.*, si et seulement si $u$ est surjectif.

• Si $E$ est dimension finie $n$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $E$, on sait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$, donc $u$ est de rang fini avec

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \leqslant n = \dim(E).$$

En particulier, si, de plus, $u$ est surjective, alors $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

**Propriété – Rang et composition**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications linéaires. Si $u$ ou $v$ est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini ; dans le premier cas on a $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$, dans le second, $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

En particulier, si $u$ et $v$ sont tous deux de rang fini,

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}.$$

Démonstration – Tout d'abord, $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$, donc si $v$ est de rang fini, $v \circ u$ est de rang fini avec

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(v)) = \mathrm{rg}(v).$$

Cela prouve l'inégalité dans le second cas évoqué ci-dessus.

Dans le premier cas, notons $r$ le rang de $u$. Si $r = 0$, $u$ et $v \circ u$ sont nulles, donc le résultat est vrai. Si $r \geqslant 1$, il existe une base $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\mathrm{Im}(u)$ où $e_1, \ldots, e_r$ sont des vecteurs de $E$. Montrons alors que $((v \circ u)(e_1), \ldots, (v \circ u)(e_r))$ engendre $\mathrm{Im}(v \circ u)$ : soit $z = (v \circ u)(x) \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ avec $x \in E$. Alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, on peut donc le décomposer sous la forme

$$u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_r u(e_r)$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$. Par linéarité de $v$, on a alors

$$z = \lambda_1 (v \circ u)(e_1) + \cdots + \lambda_r (v \circ u)(e_r),$$

ce qui prouve que $((v \circ u)(e_1), \ldots, (v \circ u)(e_r))$ engendre $\mathrm{Im}(v \circ u)$. On en déduit que $v \circ u$ est de rang fini avec

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant r = \mathrm{rg}(u),$$

d'où le résultat dans ce cas. □

**Propriété – Invariance du rang par composition par des isomorphismes**

Soit $f \in \mathcal{G}\ell(E)$ et $g \in \mathcal{G}\ell(F)$ deux automorphismes et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $u$ est de rang fini, alors $g \circ u \circ f$ est de rang fini et

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(g \circ u \circ f).$$

Démonstration – D'après l'inégalité de la propriété précédente, on sait que $g \circ u$ est de rang fini avec $\mathrm{rg}(g \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$. On en déduit de la même façon que $g \circ u \circ f$ est de rang fini avec

$$\mathrm{rg}(g \circ u \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u).$$

En remarquant que

$$u = g^{-1} \circ (g \circ u \circ f) \circ f^{-1}$$

et en raisonnant de même, on obtient l'inégalité opposée

$$\mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ u \circ f)$$

et finalement le résultat. □

## 2. Théorème du rang

**Théorème du rang**

Si $E$ est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $u$ est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

Démonstration – L'espace $E$ est de dimension finie, on sait déjà d'après une remarque précédente que $u$ est de rang fini ; de plus, $\mathrm{Ker}(u)$ admet un supplémentaire $V$ (dans $E$) : $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus V$. Soit

$$\tilde{u} : \begin{cases} V & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{cases}$$

Alors $\tilde{u}$ est injective : soit $x \in V$ tel que $\tilde{u}(x) = 0_{\mathrm{Im}(u)} = 0_F$. Alors $x \in V \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E = 0_V$. De plus, $\tilde{u}$ est surjective : fixons $y \in \mathrm{Im}(u)$ et soit $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in V$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u)$. On a donc

$$y = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = \tilde{u}(x_1),$$

et donc $y \in \tilde{u}(V)$. Finalement, $\tilde{u}$ est un isomorphisme de $V$ sur $\mathrm{Im}(u)$ avec $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus V$, donc

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)),$$

car les isomorphismes préservent la dimension. On a donc le résultat car $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u)$. □

Remarque – On retrouve la caractérisation des isomorphismes en dimension finie : si $E$ et $F$ sont de même dimension finie $n$, on sait que $u$ est injective si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 0$, ce qui équivaut d'après le théorème du rang à $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) = \dim(F)$, c'est-à-dire à la surjectivité de $u$. En particulier, $u$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = n$.

# VI. Formes linéaires et hyperplans

Nous allons maintenant expliciter un lien particulier entre un certain type de sous-espaces vectoriels de $E$ et un certain type d'applications linéaires. Dans cette partie, $E$ est de dimension finie $n \geqslant 1$.

## 1. Formes linéaires

**Définition – Forme linéaire**

On appelle **forme linéaire** sur $E$ toute application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$, *i.e.*, tout élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

Remarques

• Il s'agit d'un cas particulier d'application linéaire avec $F = \mathbb{K}$ ; en particulier, les scalaires sont également les vecteurs de l'espace d'arrivée.

• L'espace vectoriel $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, et donc $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est de dimension $n$, comme $E$.

Exemples

• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application

$$\phi_i : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots ,x_n) & \mapsto & x_i \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, appelée $i$-ième **forme coordonnée** (associée à la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Elle est aussi notée $\mathrm{d}x_i$.

• L'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.

• Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque – Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. Si $\varphi$ est non nulle, alors $\varphi$ est surjective.
En effet $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, c'est donc $\{0\}$ ou $\mathbb{K}$. Sachant que $\varphi \neq 0$, on a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$, ce qui prouve que $\varphi$ est surjective.

On peut aussi donner une démonstration plus constructive : il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ ; alors

$$\varphi\left(\lambda \frac{x}{\varphi(x)}\right) = \lambda \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lambda.$$

On a donc construit, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, un vecteur $y$ de $E$ tel que $\varphi(y) = \lambda$ : $\varphi$ est surjective.

## 2. Hyperplans

**Théorème/Définition**

Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\dim(H) = \dim(E) - 1$.
2. Il existe $x_0 \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}\, x_0$.
3. Il existe une forme linéaire $\varphi$ sur $E$, non nulle, telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Si $H$ vérifie l'une de ces propriétés équivalentes, on dit que $H$ est un **hyperplan** de $E$.

Démonstration

$2 \Rightarrow 1$ : Si $E = H \oplus \mathbb{K}\, x_0$ pour un certain vecteur $x_0$ non nul de $E$, alors

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathbb{K}\, x_0) = \dim(H) + 1,$$

d'où le résultat.

$1 \Rightarrow 3$ : Si $n = 1$, $H = \{0_E\}$, et toute forme linéaire non nulle convient. Sinon, soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $H$, que l'on complète en base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. On définit alors entièrement une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ en posant

$$\varphi(e_1) = 0, \ \ldots, \quad \varphi(e_{n-1}) = 0 \quad , \quad \varphi(e_n) = 1.$$

Alors $\varphi$ est non nulle (car $\varphi(e_n) = 1$) et, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ est un vecteur de $E$ décomposé sur la base $\mathcal{B}$, on a $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si

$$x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n) = 0$$

ce qui équivaut à $x_n = 0$, et donc au fait que $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = H$. On a donc $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
$3 \Rightarrow 2$ : Soit $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ ; en particulier $x_0 \neq 0_E$. Il suffit de montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{K}\, x_0$. Pour tout $x \in E$, on a

$$x = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, x_0 + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, x_0.$$

De plus,

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, x_0\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, \varphi(x_0) = 0,$$

donc $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, x_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, et bien sûr $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\, x_0 \in \mathbb{K}\, x_0$. On a donc $E = \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathbb{K}\, x_0$.

Enfin, si $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathbb{K}\,x_0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda x_0$, et $0 = \varphi(x) = \lambda\varphi(x_0)$. Sachant que $\varphi(x_0) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$, d'où $x = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathbb{K}\,x_0 = \{0_E\}$, ce qui achève de prouver que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{K}\,x_0$. □

Remarque – Les raisonnements précédents montrent même que si $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $E$ et $x_0 \in E$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}\,x_0$ si et seulement si $x_0 \notin H$, ce qui équivaut à : $\varphi(x_0) \neq 0$.

**Définition – Équation d'un hyperplan**

Si $H$ est un hyperplan de $E$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, on dit que l'équation $\varphi(x) = 0$ est une **équation** de $H$.

**Propriété**

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires sur $E$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration

$\boxed{\Leftarrow}$ C'est évident : sachant que $\lambda \neq 0$, pour $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $\psi(x) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\varphi = 0$, alors $\psi = 0$ (car dans ce cas $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) = E$) et on a $\psi = \varphi$. Sinon, soit $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, c'est un hyperplan de $E$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Si $n \geqslant 2$, soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $H$, que l'on complète en base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. Alors

$$\varphi(e_1) = 0 = \psi(e_1), \ldots, \quad \varphi(e_{n-1}) = 0 = \psi(e_{n-1}),$$

et $\varphi(e_n) \neq 0$, $\psi(e_n) \neq 0$. En posant $\lambda = \dfrac{\psi(e_n)}{\varphi(e_n)} \in \mathbb{K}^*$, on a $\psi = \lambda\varphi$, car ces deux applications linéaires coïncident sur la base $\mathcal{B}$. Si $n = 1$, on reprend le raisonnement avec uniquement $e_n$. □

Remarque – On sait que tout hyperplan possède une équation. D'après la propriété précédente, une telle équation est unique à multiplication par un scalaire non nul près.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $H$ un hyperplan de $E$, noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi$. Alors, un vecteur $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ appartient à $H$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$, ce qui équivaut par linéarité de $\varphi$ à

$$x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = 0.$$

En notant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \varphi(e_i)$ (qui est un élément de $\mathbb{K}$), on a finalement l'équivalence :

$$x \in H \quad \Leftrightarrow \quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

**Définition – Équation d'un hyperplan dans une base**

Avec les notations précédentes, on dit que l'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

est une **équation de $H$ dans la base $\mathcal{B}$**.

On retrouve les équations « classiques » des hyperplans, par exemple en dimension 2 (droites vectorielles) et 3 (plans vectoriels).

Les formes linéaires sur $E$ définissant l'hyperplan $H$ sont exactement celles dont l'expression en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$x \mapsto \lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Autrement dit, deux équations d'hyperplans dans une même base définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Exemples

• L'équation $x + 2y + 3z = 0$ définit un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z) \mapsto x + 2y + 3z$.

• Soit $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X];\ P(1) = 0\}$. Alors $H$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$$

Il a pour équation $P(1) = 0$. Dans la base $(X^n, \ldots, 1)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ (et en notant $P = \sum_{k=0}^{n} x_k X^k$), $H$ a pour équation

$$x_n + \cdots + x_0 = 0.$$