Espaces vectoriels normés (corrigé niveau 1).

Normes générales.

1. On a : $2.\|x\| = \|2.x\| = \|(x+y)+(x-y)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.
   De même : $2.\|y\| = \|2.y\| = \|(x+y)-(x-y)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.
   En additionnant, on obtient : $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.

2. On peut transformer la première inégalité en : $\|y-x\| \leq a.\|x\|$.
   Donc : $\|y-x\| \leq a.\|x-y+y\| \leq a.(\|x-y\| + \|y\|)$, et donc : $(1-a).\|y-x\| \leq a.\|y\|$.
   En divisant par $\|y\|$, on obtient bien : $\dfrac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \dfrac{a}{1-a}$.

3. • Si N est une norme sur E, alors : $\forall\ x \in$ E, $(u(x)=0) \Rightarrow (N(x)=0) \Rightarrow (x=0)$, et u est injective.
   • Si u est injective, alors :
   $\forall\ x \in$ E, N(x) $\in \mathbb{R}^+$,
   $\forall\ x \in$ E, $(N(x)=0) \Rightarrow (\|u(x)\|=0) \Rightarrow (u(x)=0) \Rightarrow (x=0)$,
   $\forall\ x \in$ E, $\forall\ \lambda \in$ **K**, $N(\lambda.x) = \|u(\lambda.x)\| = \|\lambda.u(x)\| = |\lambda|.\|u(x)\| = |\lambda|.N(x)$,
   $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, $N(x+y) = \|u(x+y)\| = \|u(x)+u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x)+N(y)$,
   et N est bien une norme sur E.

4. Si N est une norme, alors : $N((1,0,\ldots,0)) = a_1 > 0$, car : $(1,0,\ldots,0) \neq 0$.
   De même : $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $a_i > 0$.
   Réciproquement, si tous les a_i sont strictement positifs, alors :
   • $\forall\ x \in$ **K**^{n}, $N(x) \in \mathbb{R}^+$,
   • $\forall\ x \in$ **K**^{n}, $(N(x)=0) \Rightarrow \forall\ 1 \leq i \leq n$, $(0 \leq a_i.|x_i| \leq N(x) = a_1.|x_1| + \ldots + a_n.|x_n| = 0) \Rightarrow (x_i = 0)$,
   et donc : $x = 0$,
   • $\forall\ x \in$ **K**^{n}, $\forall\ \lambda \in$ **K**, $N(\lambda.x) = a_1.|\lambda.x_1| + \ldots + a_n.|\lambda.x_n| = |\lambda|.(a_1.|x_1| + \ldots + a_n.|x_n|) = |\lambda|.N(x)$,
   • $\forall\ (x,y) \in$ (**K**^{n})^2, $N(x+y) = a_1.|x_1+y_1| + \ldots + a_n.|x_n+y_n| \leq (a_1.|x_1| + \ldots + a_n.|x_n|) + (a_1.|y_1| + \ldots + a_n.|y_n|)$,
   et : $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
   Donc N est une norme sur **K**^{n}, et la condition précédente est bien nécessaire et suffisante.

5. • Les fonctions considérées étant de classe C^1 sur le segment [0,1], N est bien définie de E dans $\mathbb{R}^+$.
   • Si de plus on a : $f \in$ E, telle que : $N(f)=0$, alors : $|f(0)| = 0$, et : $\int_0^1 |f'(t)|.dt = 0$.
   $|f'|$ étant alors continue et positive sur [0,1], elle y est nulle et f est constante sur [0,1].
   Comme enfin elle s'annule en 0, f est la fonction nulle.
   • Pour : $f \in$ E, et : $\lambda \in \mathbb{R}$, il est immédiat par linéarité de la dérivation et de l'intégration sur [0,1] que :
   $N(\lambda.f) = |\lambda|.N(f)$.
   • Enfin : $\forall\ (f,g) \in$ E^2,
   $N(f+g) = |f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(t)+g'(t)|.dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|.dt + \int_0^1 |g'(t)|.dt = N(f)+N(g)$.
   Donc N définit bien une norme sur E.

6. Puisque A est symétrique réelle, on peut trouver P orthogonale et D diagonale telles que : $A = {}^tP.D.P$.
   De plus les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et sont strictement positifs.
   On va ensuite démontrer que : $(X,Y) \mapsto {}^tX.A.Y$, définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour cela :

$\forall\ (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tX.A.Y = {}^tX.{}^tP.D.P.Y = {}^tX'.D.Y' = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i}.x'_i.y'_i$,

où on a posé : $X' = P.X$., et : $Y' = P.Y$.
Sous cette forme il est immédiat que l'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Elle est de plus positive car :

$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX.A.X = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i}.x'^2_i \geq 0$.

Enfin, elle est définie car :

$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(N(X) = 0) \Rightarrow (\forall\ 1 \leq i \leq n,\ x'_i = 0)$, puisque les $d_{i,i}$ sont strictement positifs

$\Rightarrow (X' = 0) \Rightarrow (P.X = 0 \Rightarrow (X = 0)$, puisque P est inversible.

Ayant démontré qu'on avait bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'expression proposée dans l'exercice est alors la norme attachée à ce produit scalaire.

Suites et comparaisons de normes.

7. Notons : E = $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

a. Les fonctions f_n sont affines sur les deux sous-intervalles et coïncident en $\frac{1}{n}$.

Donc elles sont bien continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
Puis :

- $N_1(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2.t).dt = \left[n.t - n^2.\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$,
- $N_2(f_n) = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2.t)^2.dt} = \sqrt{\left[n^2.t - n^3.t^2 + n^4.\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{3}}$,
- $N_\infty(f_n) = n$.

b. On a immédiatement : $\forall\ f \in$ E,

- $N_1(f) \leq \int_0^1 N_\infty(f).dt \leq N_\infty(f).\int_0^1 dt = 1.N_\infty(f)$,
- $N_2(f)^2 \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2.dt \leq N_\infty(f)^2.\int_0^1 dt = 1.N_\infty(f)^2$, soit : $N_2(f) \leq 1.N_\infty(f)$,
- $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|.1.dt \leq \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2.dt}.\sqrt{\int_0^1 1^2.dt} = 1.N_2(f)$,

avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans E muni de son produit scalaire canonique.

c. Supposons que β existe, avec : $\beta > 0$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\beta.N_\infty(f_n) \leq N_1(f_n)$, soit : $\beta.n \leq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

De même, si β' existe, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\beta'.N_\infty(f_n) \leq N_2(f_n)$, et : $\beta'.n \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, encore impossible.

Enfin, si β'' existe : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\beta''.N_2(f_n) \leq N_1(f_n)$, et : $\beta''.\sqrt{\frac{n}{3}} \leq \frac{1}{2}$, toujours impossible.

8. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des suites réelles bornées (u_n), telles que : $u_0 = 0$.

Pour : $u \in$ E, on pose : $N_\infty(u) = \sup_{n\geq 0} |u_n|$, et : $N(u) = \sup_{n\geq 0} |u_{n+1} - u_n|$.

a. Puisque tout élément de E est une suite bornée, N_∞ et N sont définies sur E et à valeurs positives.

De plus : $\forall\ u \in$ E, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.(u_n) = (\lambda.u_n)$,

donc les propriétés classiques des bornes supérieures permettent d'obtenir que :

$N_\infty(\lambda.(u_n)) = |\lambda|.N_\infty((u_n))$, et : $N(\lambda.(u_n)) = |\lambda|.N((u_n))$.

Puis si pour : $u \in$ E, on a : $N_\infty(u) = 0$, alors :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n| \leq N_\infty(u) = 0$, donc : $u_n = 0$, et : $u = 0$.

De même, si on a : $N(u) = 0$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq N(u) = 0$, donc : $u_{n+1} = u_n$.

On en déduit que u est constante et comme de plus : $u_0 = 0$, finalement : $u = 0$.

Enfin : $\forall\ (u,v) \in E^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq N_\infty(u) + N_\infty(u)$,

et a fortiori : $N_\infty(u+v) \leq N_\infty(u) + N_\infty(u)$.

Le même type de raisonnement donne un résultat similaire pour N.

Donc N_∞ et N sont des normes sur E.

b. On a immédiatement : $\forall\ u \in E,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2.N(u)$, et donc : $N(u) \leq 2.N_\infty(u)$.

c. Pour : $p \geq 1$, considérons la série dont le terme général est :

- $a_{0,p} = 0$,
- $\forall\ 1 \leq n \leq p,\ a_{n,p} = \dfrac{1}{p}$, et :
- $\forall\ p+1 \leq n,\ a_{n,p} = 0$.

Notons alors ($S_n^{(p)}$) la suite des sommes partielles de cette série convergente.

On constate que :

- $\forall\ 0 \leq n \leq p,\ S_n^{(p)} = \dfrac{n}{p}$, et :
- $\forall\ p+1 \leq n,\ S_n^{(p)} = 1$.

Donc la suite $S^{(p)}$ est dans E.

Puis : $N_\infty(S^{(p)}) = 1$, et : $N(S^{(p)}) = N_\infty(S_{n+1}^{(p)} - S_n^{(p)}) = N_\infty((a_{n+1,p})) = \dfrac{1}{p}$.

Ainsi, s'il était possible de trouver : $\beta > 0$, tel que : $N_\infty \leq \beta.N$, alors on aurait :

$\forall\ p \geq 1,\ 1 = N_\infty(S^{(p)}) \leq \beta.N(S^{(p)}) = \dfrac{\beta}{p}$, soit : $p \leq \beta$, ce qui est impossible.

Donc il n'est pas possible de trouver une telle inégalité.

9. a. Puisque : $E \subset C^0([0,1],\mathbb{R})$, la norme N est simplement la norme N_∞ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ induite sur E.

A ce titre, c'est bien une norme sur $\mathbb{R}$.

N' est également une norme sur E, car :

- $\forall\ f \in E$, f' est continue sur [0,1], et $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ existe (et appartient à $\mathbb{R}^+$),
- $\forall\ f \in E$, $(N'(f) = 0) \Rightarrow (N_\infty(f') = 0) \Rightarrow (f' = 0) \Rightarrow (f = cste) \Rightarrow (f = 0$, car : $f(0) = 0)$.
- $\forall\ f \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ N'(\lambda.f) = N_\infty(\lambda.f') = |\lambda|.N_\infty(f') = |\lambda|.N'(f)$,
- $\forall\ (f,g) \in E^2,\ N'(f+g) = N_\infty(f'+g') \leq N_\infty(f') + N_\infty(g') = N'(f) + N'(g)$.

b. Soit : $f \in E$.

Alors : $\forall$ t $\in$ [0,1], $\exists\ c \in$ [0,1], $f(t) = f(t) - f(0) = (t-0).f'(c)$, et donc : $|f(t)| \leq |f'(c)| \leq N'(f)$.

Cette majoration étant valable pour tout t, on en déduit que : $N(f) \leq N'(f)$, d'où : $N \leq N'$.

c. Considérons les fonctions f_n définies par : $\forall$ t $\in$ [0,1], $f_n(t) = t^n$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $N(f_n) = 1$, et : $N'(f_n) = n$, car : $\forall$ t $\in$ [0,1], $f_n'(t) = n.t^{n-1}$.

Donc si maintenant on pouvait trouver : $\alpha > 0$, telle que : $\alpha.N' \leq N$, alors on aurait :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha.n \leq 1$, ce qui est impossible, et donc un tel α n'existe pas.

10. a. • Pour le polynôme nul, $N(P)$ et $N_\infty(P)$ existent et sont des réels positifs.

Si P est non nul, alors $N_\infty(P)$ existe comme plus grande valeur d'un nombre <u>fini</u> de réels (positifs) et c'est un réel positif.

De même, puisque les coefficients d'un polynôme sont nuls à partir d'un certain rang, la série qui définit

$N(P)$ a ses termes nuls à partir d'un certain rang et donc converge.
Enfin, tous les termes de la série étant positifs, sa somme l'est aussi.
Pour les démonstrations suivantes, on ne distinguera plus le cas du polynôme nul.

• Pour : $P \in$ **K**[X], et : $\lambda \in$ **K**, on a :
$\forall\ 0 \le k \le \deg(P)$, $|\lambda.a_k| = |\lambda|.|a_k| \le |\lambda|.N_\infty(P)$,
donc : $N_\infty(\lambda.P) \le |\lambda|.N_\infty(P)$.
En distinguant au besoin, le cas où λ est nul, on en déduit classiquement l'inégalité inverse, et donc finalement l'égalité : $N_\infty(\lambda.P) = |\lambda|.N_\infty(P)$.
Puis : $N(\lambda.P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda.a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |\lambda|.|a_k|.2^{-k} = |\lambda|.\sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} = |\lambda|.\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = |\lambda|.N(P)$.

• Soit : $P \in$ **K**[X], non nul.
Alors P comporte au moins un coefficient non nul a_N et : $N_\infty(P) \ge |a_N| > 0$,
d'où le résultat voulu par contraposée.
De même : $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} \ge |a_N|.2^{-N} > 0$.

• Soient P et Q deux polynômes avec : $m = \max(\deg(P), \deg(Q))$, et de coefficients a_k et b_k.
Alors : $\forall\ 0 \le k \le m$, $|a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k| \le N_\infty(P) + N_\infty(Q)$, puis : $N_\infty(P+Q) \le N_\infty(P) + N_\infty(Q)$.
De même : $N(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k + b_k|.2^{-k} \le \sum_{k=0}^{N} (|a_k| + |b_k|).2^{-k} = \sum_{k=0}^{N} |a_k|.2^{-k} + \sum_{k=0}^{N} |b_k|.2^{-k} = N(P) + N(Q)$.

b. Il est immédiat que : $\forall\ P \in$ **K**[X], $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} \le N_\infty(P).\sum_{k=0}^{\deg(P)} 2^{-k} \le N_\infty(P).\frac{1}{1-2^{-1}}$.
On en déduit donc que : $N \le 2.N_\infty$, et : $\alpha = 2$, répond à la question.

c. Considérons la suite : $(P_n) = (X^n)$.
Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $N_\infty(P_n) = 1$, et la suite (P_n) ne tend pas vers 0 pour N_∞
De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $N(P_n) = \sum_{k=0}^{\deg(P_n)} |a_k|.2^{-k} = 2^{-n}$, et la suite ($P_n$) converge vers 0 pour N.
Or si on pouvait trouver : $\beta > 0$ tel que : $\beta.N_\infty \le N$, alors la convergence de (P_n) vers 0 pour la norme N entraînerait (avec le théorème des gendarmes dans ℝ), la convergence de (P_n) vers 0 pour N_∞.
Donc un tel β n'existe pas.

11. a. On peut montrer le résultat suivant par récurrence ou simplement écrire :
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n o(u - id_E) = \frac{1}{n+1}.\left(\sum_{k=0}^{n} u^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u^k\right) = \frac{1}{n+1}.\left(\sum_{k=1}^{n+1} u^k - \sum_{k=0}^{n} u^k\right) = \frac{1}{n+1}.(u^{n+1} - id_E).$$
b. Soit : $z \in \ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E)$.
Alors : $u(z) = z$, et : $\exists\ y \in$ E, $z = u(y) - y$.
Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n(z) = v_n((u - id_E)(y)) = \frac{1}{n+1}.(u^{n+1}(y) - y)$,
et donc : $\|v_n(z)\| = \frac{1}{n+1}.\|u^{n+1}(y) - y\| \le \frac{\|u^{n+1}(y)\| + \|y\|}{n+1}$.
Or il est immédiat par récurrence que, vu l'hypothèse faite sur u, on a : $\|u^{n+1}(y)\| \le \|y\|$,
et donc : $\|v_n(z)\| \le \frac{2.\|y\|}{n+1}$, d'où on déduit que : $\lim_{n\to+\infty} \|v_n(z)\| = 0$, et donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n(z) = 0$.
Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n(z) = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} u^k(z) = \frac{1}{n+1}.((n+1).z) = z$.
Donc la suite $(v_n(z))$ est constante, égale à z et tend vers 0, d'où on déduit que : $z = 0$.

La somme $(\ker(u - id_E) + \mathrm{Im}(u - id_E))$ est donc directe.

Le théorème du rang permet de conclure que : $\ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E) = E$.

c. Soit maintenant : $x \in$ E .

Il existe alors : $z \in \mathrm{Im}(u - id_E)$, tels que : $x = p(x) + z$, où p est la projection proposée.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n(x) = v_n(p(x)) + v_n(z)$.

En reprenant la question précédente, on constate de même que :

- $u(p(x)) = p(x)$, donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n(p(x)) = \dfrac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} u^k(p(x)) = \dfrac{1}{n+1}.((n+1).p(x)) = p(x)$,
- $\exists\ y \in$ E, $z = u(y) - y$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n(z) = \dfrac{1}{n+1}.(u^{n+1}(y) - y)$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} v_n(z) = 0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(v_n(p(x)) + v_n(z)) = \lim_{n\to+\infty}(p(x)) + \lim_{n\to+\infty} v_n(z) = p(x) + 0 = p(x)$

d. Soit : $\mathscr{B} = (e_1,...,e_m)$, une base de E, et soit N_∞ la norme infinie attachée à cette base dans E.

On note ensuite : $\forall\ f \in \mathscr{L}(E),\ N(f) = \sum_{i=1}^{m} N_\infty(f(e_i))$.

Alors N définit une norme sur $\mathscr{L}$(E).

En effet, elle est correctement définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, elle a la propriété d'homogénéité, elle vérifie l'inégalité triangulaire, et si elle s'annule pour f, alors f s'annule sur les vecteurs d'une base de E et donc est l'endomorphisme nul.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ N(v_n - p) = \sum_{i=1}^{m} N_\infty(v_n(e_i) - p(e_i))$,

et comme somme de m suites réelles tendant vers 0, on conclut que : $\lim_{n\to+\infty} N(v_n - p) = 0$,

autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} v_n = p$.

Suites et normes dans $\mathscr{M}_n$(K).

12. On va ici déterminer explicitement la suite (X_n).

Pour cela, la matrice A a pour polynôme caractéristique : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1).\left(\lambda - \dfrac{1}{6}\right)$.

A est donc diagonalisable, et on peut la diagonaliser en cherchant ses espaces propres :

$E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, et : $E_{\frac{5}{6}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right)$.

On peut alors écrire : $A = P.D.P^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$, et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ X_n = P.\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n\end{pmatrix}.P^{-1}.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{5} + \frac{3}{5}.\left(\frac{5}{6}\right)^n\\ \frac{7}{5} - \frac{2}{5}.\left(\frac{5}{6}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Puisque les deux suites coordonnées liées à (X_n) dans la base canonique convergent, (X_n) est donc une suite convergente, et : $\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix} = \dfrac{7}{5}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Remarque : dans une version vectorielle, si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, p_1 et $p_{\frac{5}{6}}$, les projecteurs associés à la décomposition de $\mathbb{R}^2$ à l'aide des sous-espaces propres de A, alors :

$u = 1.p_1 + \frac{5}{6}.p_{\frac{5}{6}}$, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u^n = 1.p_1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n .p_{\frac{5}{6}}$,

puis : $u^n(2,1) = 1.p_1(2,1) + \left(\frac{5}{6}\right)^n .p_{\frac{5}{6}}(2,1)$.

On constate alors que $(u^n(2,1))$ converge vers : $p_1(2,1) = \frac{7}{5}.(1,1)$, car : $(2,1) = \frac{7}{5}.(1,1) + \frac{1}{5}.(3,-2)$.

13. a. On constate immédiatement que : $N\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3.3 = 9$.

b. L'application est correctement définie sur E et est à valeurs positives.
Avec les propriétés classiques des $\sup$ ou des $\max$, on a : $\forall\ A \in$ E, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda.A) = |\lambda|.N(A)$.
Si pour : $A \in$ E, on a : $N(A) = 0$, alors : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $|a_{i,j}| \le N(A) = 0$, donc : $|a_{i,j}| = 0$, et : $A = 0$.
Enfin : $\forall\ (A, B), \in$ E^2, $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $n.|a_{i,j} + b_{i,j}| \le n.|a_{i,j}| + n.|b_{i,j}| \le N(A) + N(B)$,
et a fortiori : $N(A + B) \le N(A) + N(B)$.
Donc N est une norme sur E.

c. Pour : $(A, B), \in$ E^2, si on note : $C = A.B$, on a :

$$\forall\ 1 \le i, j \le n,\ n.|c_{i,j}| = n.\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n} n.|a_{i,k}|.|b_{k,j}| \le N(A).\sum_{k=1}^{n}|b_{k,j}| \le N(A).n.\max_{1\le k,j\le n}|b_{k,j}| = N(A).N(B),$$

et a fortiori : $N(C) = N(A.B) \le N(A).N(B)$.

d. Notons tout d'abord que N' est toujours une norme sur E (même démonstration).
Si on remplace N par N', le résultat n'est plus vrai pour : $n \ge 2$, car avec : $A = B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, on a :

- $N'(A) = N'(B) = 1 = N'(A).N'(B)$,
- $A.B = n.A$, donc : $N'(A.B) = n.N'(A) = n$,

et dans le cas précisé : $n > 1$.

14. a. Chaque somme est, pour une matrice A la somme des modules des coefficients de la ligne.
$\|A\|$ représente donc la plus grande de ces sommes.

b. Il est clair que pour une matrice A, $\|A\|$ existe et est un réel positif, comme plus grand élément d'une famille finie de réels positifs.
Puis : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si : $\|A\| = 0$, alors :

$$\forall\ 1 \le i \le n,\ 0 \le \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \le \|A\| = 0, \text{ et : } \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = 0,$$

d'où on déduit que tous les coefficients de la matrice A sont nuls, puis enfin que A est nulle.
Pour : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,et : $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

$$\forall\ 1 \le i \le n,\ \sum_{j=1}^{n}|\lambda.a_{i,j}| = |\lambda|.\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \le |\lambda|.\|A\|, \text{ d'où : } \|\lambda.A\| \le |\lambda|.\|A\|,$$

eten distinguant au besoin le cas où λ est nul, on en déduit l'inégalité inverse puis l'égalité :
$\|\lambda.A\| = |\lambda|.\|A\|$.

Enfin : $\forall\ (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$, et :

$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

c. Soit donc : $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$.

Alors : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.\|B\| \leq \|A\|.\|B\|$,

d'où on déduit que : $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

d. Pour : $(A,X) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, et en notant : $Y = A.X$, on a :

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, $|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.|x_j| \leq N_\infty(X).\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq N_\infty(X).\|A\|$,

d'où on déduit : $N_\infty(A.X) = N_\infty(Y) \leq \|A\|.N_\infty(X)$.

e. Soit alors λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

On a : $A.X = \lambda.X$, donc : $N_\infty(A.X) = |\lambda|.N_\infty(X) \leq \|A\|.N_\infty(X)$,

et en divisant par $N_\infty(X)$, non nulle puisque X est non nul, on en déduit finalement que : $|\lambda| \leq \|A\|$.

15. a. La suite $(M^{2.n})$ est une suite extraite de (M^n) donc elle converge vers la même limite, c'est-à-dire A.

b. Soit $\|\ .\ \|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisqu'on peut écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $M^{2.n} - A^2 = (M^n - A).M^n + A.(M^n - A)$,

on a aussi : $\|M^{2.n} - A^2\| \leq \|M^n - A\|.\|M^n\| + \|A\|.\|M^n - A\|$.

La suite (M^n) étant convergente, elle est bornée (en norme) par une constante C, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\|M^{2.n} - A^2\| \leq (C + \|A\|).\|M^n - A\|$,

d'où on déduit avec le théorème des gendarmes que $(M^{2.n})$ converge vers A^2.

L'unicité d'une limite de suite montre donc que : $A = A^2$.

16. a. Soit $\|\ .\ \|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut écrire : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\|(B.A)^{p+1}\| = \|B.(A.B)^p.A\| \leq \|B\|.\|(A.B)^p\|.\|A\|$,

et le majorant tendant vers 0, on en déduit que $((B.A)^p)$ tend aussi vers 0.

b. On peut le montrer entièrement avec :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\|P.Q - (A^p.B^p)\| = \|P.Q - A^p.Q + A^p.Q - A^p.B^p\| \leq \|P - A^p\|.\|Q\| + \|A^p\|.\|Q - B^p\|$.

Comme (A^p) converge, c'est une suite bornée et le théorème des gendarmes montre que $(A^p.B^p)$ tend vers $P.Q$ alors que $(B^p.A^p)$ tend vers $Q.P$.

Mais comme c'est deux fois la même suite, par unicité de la limite, on en déduit que : $P.Q = Q.P$.

c. On constate que, de même que dans la question précédente, la suite constante $(A_p.A_p^{-1})$ (égale à I_n) converge vers $A.B$.

Donc par unicité de la limite, on en déduit que : $A.B = I_n$, et : $B = A^{-1}$.

d. Considérons la suite $\left(\frac{1}{p}.I_n\right)_{p \geq 1}$.

Alors cette suite est bien une suite de matrices inversibles, et qui converge vers 0.
Or d'après la question c, si la suite des inverses convergeait (vers B) alors la matrice nulle serait inversible et son inverse serait B.
Donc la suite des inverses diverge.

Topologie.

17. a. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$, car ce sont les complémentaires de réunions infinies d'ouverts, à savoir :

- $(-\infty,0[\cup\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}]n,n+1[\right)$, pour ℕ, et :
- $\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}]n,n+1[\right)$ pour ℤ.

Ils ne sont pas ouverts car 0 n'est pas un point intérieur.
En effet toute boule ouverte centrée en 0 (donc ici tout intervalle ouvert de type $]-r,+r[$) contient des valeurs qui ne sont pas entières et donc qui sortent de ℕ et de ℤ, par exemple $\min\left(\frac{r}{2},\frac{1}{2}\right)$.

ℚ n'est ni ouvert ni fermé dans ℝ puisque :

- 0 par exemple n'est pas intérieur à ℚ car tout intervalle ouvert $]-r,+r[$ centré en 0 contient des irrationnels : $\exists\ n \in$ ℕ, $10^{-n} < r$, et $\frac{10^{-n}}{\sqrt{2}}$ est dans $]-r,+r[$ mais pas dans ℚ.
- de même, pour un point du complémentaire (ℝ \ ℚ) (par exemple $\sqrt{2}$), tout intervalle centré en ce point ne sera pas inclus dans (ℝ \ ℚ) car il contiendra des rationnels.
  On peut aussi dire qu'il existe une suite convergente d'éléments de ℚ, dont la limite n'est pas dans ℚ (par exemple la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ définie par :
  $\forall\ n \in$ ℕ, $a_n = 10^{-n}.E(10^n.\sqrt{2})$,
  qui tend vers $\sqrt{2}$) et donc ℚ n'est pas fermé.

b. L'ensemble proposé est une réunion infinie d'ouverts donc c'est un ouvert dans ℝ : même principe de démonstration qu'au-dessus.
D'autre part, ça n'est pas un fermé car la suite définie par : $\forall\ n \in$ ℕ, $a_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2^{n+1}}$,
c'est-à-dire la suite des milieux des intervalles, converge mais vers une limite qui est 0 et qui est hors de l'ensemble : $\bigcup_{n\in N}\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[$.

c. L'ensemble (notons le F) est fermé dans ℝ^3.
En effet, si une suite : $(u_n) = ((a_n,b_n,c_n))$, de points de F converge vers : $u=(a,b,c)$, alors :

- $\forall\ n \in$ ℕ, $a_n \in [0,1]$, $b_n \in [0,1]$, $c_n \in [0,+\infty)$,
- les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent respectivement vers a,b,c.
- en passant à la limite dans les inégalités du premier point, on a : $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $c \in [0,+\infty)$,

et la limite u est bien dans F.
Il n'est pas ouvert car tout boule centrée en (0,0,0) (qui est dans F) de rayon r n'est pas incluse dans F car le point $\left(-\frac{r}{2},-\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$ est dans la boule mais pas dans F.

d. Si on note H cet ensemble, alors il a par exemple une équation : $a_1.x_1+\ldots+a_n.x_n = 0$,
dans la base canonique de ℝ^n (ou « $=b$ », si on considère un hyperplan affine de ℝ^n),
et l'un des a_i est non nul (on supposera dans la suite que c'est a_n).
Alors H est fermé car si (u_p) est une suite d'éléments de H, avec : $\forall\ p \in$ ℕ, $u_p = (x_{p,1},\ldots,x_{p,n})$,
qui converge vers : $u=(x_1,\ldots,x_n)$, alors :

- $\forall\ 1\le i\le n$, $(x_{p,i})$ converge vers x_i,
- $\forall\ p \in$ ℕ, $a_1.x_{p,1}+\ldots+a_n.x_{p,n} = 0$, puisque ce sont des points de H,
- en passant à la limite dans l'égalité précédente on en déduit que : $a_1.x_1+\ldots+a_n.x_n = 0$, et : $u\in H$.

H par ailleurs n'est pas ouvert car pour : $u=(x_1,\ldots,x_n) \in H$, et quelque soit : $r>0$, la boule ouverte (par exemple pour la norme infinie) centrée en u et de rayon r n'est pas incluse dans H.
En effet le point : $u' = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\frac{r}{2})$,

• est dans la boule car : $N_\infty(u-u') = \max\left(0,\dots,0,\frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} < r$,

• n'est pas dans H car : $a_1.x_1 + \dots + a_n.\left(x_n + \frac{r}{2}\right) = (a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n) + a_n.\frac{r}{2} = 0 + a_n.\frac{r}{2} \neq 0$.

18. a. L'existence pour tout élément de E et la positivité sont immédiates.

De même : $\forall\ (x,y) \in$ E, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda.(x,y)\| = |\lambda.x| + \sqrt{(\lambda.x)^2 + (\lambda.y)^2} = |\lambda|.\|(x,y)\|$.

Enfin et puisque : $\forall\ (x,y) \in$ E, $\|(x,y)\| = |x| + N_2((x,y))$, on a aussi :

$\forall\ ((x,y),(x',y')) \in$ E^2,

$$\|(x,y)+(x',y')\| = |x+x'| + N_2((x,y)+(x',y')) \leq |x| + |x'| + N_2((x,y)) + N_2((x',y'))$$
$$\leq \|(x,y)\| + \|(x',y')\|.$$

Donc $\|\ .\ \|$ est bien une norme sur E.

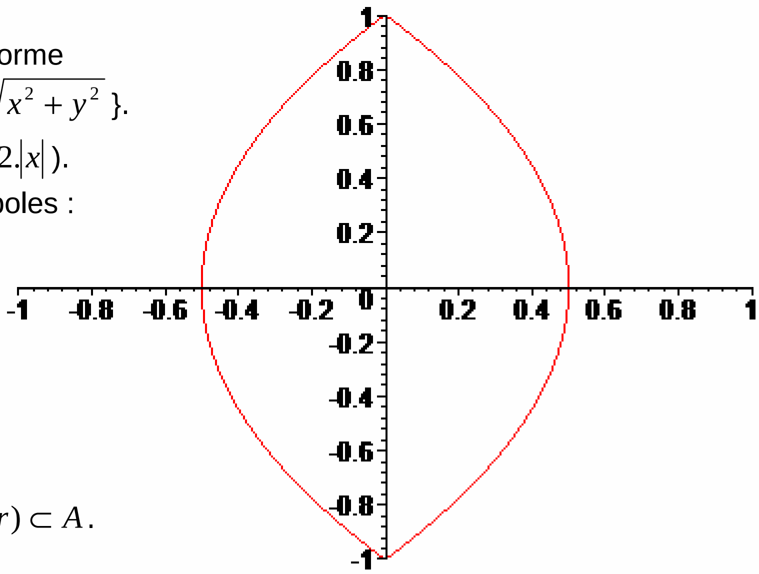
b. La boule de centre O et de rayon 1 pour cette norme est définie comme : $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 = |x| + \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Donc : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $((x,y) \in B) \Leftrightarrow (y^2 = 1 - 2.|x|)$.

C'est donc la réunion de deux portions de paraboles :

• $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $y = \pm\sqrt{1-2.x}$, et :

• $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, $y = \pm\sqrt{1+2.x}$.



19. On va utiliser une norme N quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit : $(a,b) \in A+B$, et donc : $a \in A$, $b \in B$.

Puisque A est ouvert, on sait que : $\exists\ r > 0$, $B(a,r) \subset A$.

Montrons que : $B(a+b,r) \subset A+B$.

Pour cela, soit : $x \in B(a+b,r)$, et posons : $a' = x - b$.

Alors : $N(x-(a,b)) < r$, et donc : $N(a'-a) < r$, soit : $a' \in B(a,r)$, et donc : $a \in A$.

Autrement dit : $x = a' + b$, avec : $a \in A$, et : $b \in B$, ce qui entraîne : $x \in A+B$.

On vient de montrer que : $B(a+b,r) \subset A+B$, et $A+B$ est bien un ensemble ouvert.

Remarque : on peut constater en reprenant la démonstration précédente, qu'il suffit que l'un des deux ensembles A ou B soit ouvert pour que $A+B$ soit encore un ouvert.

20. a. Etant donnée une base : $\mathscr{B}$ = (e$_1$, …, e$_n$), de l'espace, un hyperplan admet une équation du type : $a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0$, dans cette base $\mathscr{B}$.

Si (u_p) est une suite d'éléments de H, avec : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $u_p = \sum_{i=1}^{n} x_{p,i}.e_i$, qui converge vers :

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, alors :

• $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $(x_{p,i})$ converge vers x_i,

• $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $a_1.x_{p,1} + \dots + a_n.x_{p,n} = 0$, puisque ce sont des éléments de H,

• en passant à la limite dans l'égalité précédente on en déduit que : $a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0$, et : $u \in H$.

Donc H est fermé.

b. • L'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathscr{M}_n$(**K**) est un hyperplan de $\mathscr{M}_n$(**K**), noyau de la forme linéaire non nulle 'trace'.

A ce titre, c'est un fermé de $\mathscr{M}_n$(**K**).

• l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est l'intersection de $\frac{n.(n-1)}{2}$ hyperplans de $\mathscr{M}_n$(**K**), qui sont les noyaux des formes linéaires non nulles : $\forall\ 1\leq j<i\leq n,\ A\mapsto a_{i,j}$.

En effet, une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n$(**K**), est caractérisée par : $\forall\ 1\leq j<i\leq n,\ a_{i,j}=0$.

Donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n$(**K**) (de même que les matrices triangulaires inférieures).

• l'ensemble des matrices diagonales est aussi une intersection de fermés, cette fois de n^2-n fermés, noyaux des formes linaires : $\forall\ 1\leq j\neq i\leq n,\ A\mapsto a_{i,j}$.

Donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n$(**K**).

• enfin, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$(**K**) est lui l'intersection de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ hyperplans, noyaux des formes linéaires non nulles : $\forall\ 1\leq j<i\leq n,\ A\mapsto a_{i,j}-a_{j,i}$ i, et donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n$(**K**) (de même pour les matrices antisymétriques).

Remarque : pour cette question b, on aurait aussi pu montrer que toute suite convergente d'éléments de ces ensembles avait sa limite à chaque fois dans l'ensemble considéré.

21. • Soit (u_n) une suite d'éléments de F convergente pour la norme N_∞ vers la fonction u de E.
Alors : $\forall\ x\in[0,1],\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n(x)\geq 0$,
et puisque la suite (u_n) converge aussi simplement vers u sur [0,1], on en déduit en passant à la limite que : $\forall\ x\in[0,1],\ u(x)\geq 0$,
autrement dit : $u\in F$, et F est fermé.
• Soit maintenant : $u\in\Omega$.
Alors u est continue sur [0,1] et elle atteint son minimum en un point : $c\in[0,1]$, où : $u(c)>0$.
Alors la boule ouverte de centre u et de rayon : $r=u(c)$, est incluse dans Ω.
En effet, si : $v\in B(u,r)$, alors : $N_\infty(v-u)<r$, donc : $\forall\ x\in[0,1],\ |v(x)-u(x)|<r$.
Donc : $\forall\ x\in[0,1],\ v(x)>u(x)-r=u(x)-u(c)\geq 0$,
car u atteint son minimum en c et on a bien : $v(x)>0$.
Autrement dit : $v\subset\Omega$, et : $B(u,r)\subset\Omega$, donc Ω est un ouvert de E.

22. a. Pour : $x\in$ E, on considère l'application : $y\mapsto\|x-y\|$.
Elle est définie et lipschitzienne sur E car : $\forall\ (y,y')$, $\big|\|x-y\|-\|x-y'\|\big|\leq\|(x-y)-(x-y')\|=\|y-y'\|$.
Donc l'application est continue sur E.
Puis F étant non vide, l'ensemble : $N=\{\|x-y\|,\ y\in F\}$, est non vide et constitué de réels positifs.
Donc il admet une borne inférieure de $d(x,F)$ existe.
b. Raisonnons par double implication.
• Si : $x\in F$, alors : $0=\|x-x\|\in N$.
Donc la borne inférieur de N (inclus dans $\mathbb{R}^+$) est bien 0 et : $d(x,F)=0$.
• Si : $d(x,F)=0$, alors : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ \exists\ y_n\in F,\ \|x-y_n\|\leq\dfrac{1}{n}$,
par définition d'une borne inférieure.
La suite (y_n) est donc convergente et converge vers x.
Mais F étant fermé, toute suite d'éléments de F convergente a sa limite dans F, et donc : $x\in F$.

23. a. • Soit : $u\in$ E.
Alors u est bornée et : $\|u\|_\infty=\sup\limits_{n\geq 0}|u_n|$, existe, et comme borne supérieure d'un ensemble de réels positifs, c'est encore un réel positif.
• Si pour : $u\in$ E, on a : $\|u\|_\infty=0$, alors :
$\forall\ n\in\mathbb{N},\ 0\leq|u_n|\leq\|u\|_\infty=0$, et : $u_n=0$, soit : $u=0$.
• Soit : $u\in$ E, et : $\lambda\in\mathbb{R}$.

La valeur $|\lambda|$ étant alors positive, on a bien : $\|\lambda.u\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 0}|\lambda.u_n| = \sup\limits_{n\geq 0}|\lambda|.|u_n| = |\lambda|.\sup\limits_{n\geq 0}|u_n| = |\lambda|.\|u\|_\infty$.

• Enfin : $\forall\ (u,v) \in$ E², $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$,

et ceci étant vrai pour tout n, on en déduit que : $\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

b. Il nous faut donc trouver une boule ouverte centrée en 1 et incluse dans F.
Pour cela, posons : $r = 1$.
Alors : $\forall\ u \in B(1,r)$, $\|u-1\|_\infty < 1$,

et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| < 1$, ce qui entraîne : $u_n > 1-1 = 0$.

La suite u est alors bien dans F, et la boule proposée est incluse dans F.
Donc la suite **1** est bien intérieure à F.

Continuité, applications lipschitziennes.

24. a. On a tout d'abord : $f(a) = 0$, puisque : $\|a\| \leq \|a\|$, et donc :

- $\forall\ x \in$ E, tel que : $\|x\| \leq \|a\|$, on a : $|f(x) - f(a)| = \|x-a\| - 0| = \|x-a\|$,
- $\forall\ x \in$ E, tel que : $\|x\| > \|a\|$, on a : $|f(x) - f(a)| = |0-0| = 0 \leq \|x-a\|$.

Autrement dit : $\forall\ x \in$ E, $|f(x) - f(a)| \leq \|x-a\|$.

Il est alors clair que f est continue en a car :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$, avec : $\alpha = \varepsilon$, tel que : $\forall\ x \in$ E, ($\|x-a\| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$).

b. Considérons la suite définie par : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $x_p = -(1+2^{-p}).a$.

La suite (x_p) tend vers $-a$ car : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\|x_p - (-a)\| = 2^{-p}.\|a\|$, qui tend bien vers 0.

Mais la suite ($f(x_p)$) ne tend pas vers $f(-a)$ car :

- $f(-a) = \|-a-a\| = 2.\|a\| \neq 0$, car : $\|-a\| = \|a\| \leq \|a\|$, et :
- $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $f(x_p) = 0$, car : $\|x_p\| = (1+2^{-p}).\|a\| > \|a\|$, car a est non nul.

La suite (x_p) converge donc vers 0 qui n'est pas $f(-a)$ et f n'est pas continue en $-a$.

25. a. C'est simplement l'inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$.
En effet : $\forall\ (x,y) \in I^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k.|x-y|$, puisque k majore $|f'|$ sur I.

b. Puisque : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, on a : $|f'(x)| = \dfrac{1}{(1+x)^2} \leq 1$.

Donc f est 1-lipschitzienne.

Si de plus f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$, alors : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x) - f(0)| \leq k.|x-0|$,

donc : $\forall\ x > 0$, $\dfrac{|f(x) - f(0)|}{|x-0|} \leq k$,

et en faisant tendre x vers 0, on obtient : $1 = |f'(0)| \leq k$.

Donc 1 est la meilleure valeur de k que l'on puisse proposer.

26. En notant f l'application proposée, on a immédiatement à l'aide de la deuxième inégalité triangulaire :

$\forall\ (x,y) \in$ E², $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

Donc : $\forall\ (x,y) \in$ E², $\|f(x) - f(y)\| = \|(\|x\| - \|y\|).a\| = |\|x\| - \|y\||.\|a\| \leq \|a\|.\|x-y\|$.

f est donc $\|a\|$-lipschitzienne et donc continue sur E.